§1. 特殊相対論

▷ 特殊相対性原理
▷ 光速不変の原理　　の2つの原理から展開される

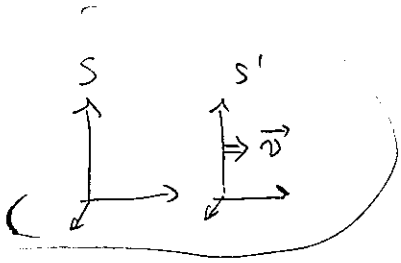
1-1 特殊相対性原理

Newton力学における相対性原理（Galileiの相対性原理）
「慣性系」での古典力学の法則（Newtonの運動法則）は不変である。

※「慣性系」＝外力の働いていない物体が等速直線運動するように観測されるような座標系（観測者）
慣性系どうしは互いに等速直線運動する。

○ Newtonの運動方程式

$$\underbrace{m}_{質量}\cdot\underbrace{\frac{d^2}{dt^2}x}_{加速度} = \underbrace{F}_{力}$$



慣性系どうしの変換（Galilei変換）

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

により形は変わらない

$$m\cdot\frac{d^2}{dt'^2}x = F$$

ところが、電磁気学の法則はGalilei変換に対して不変ではない

◎. 真空中でのMaxwell方程式

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

c：定数

$$\rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \Delta\vec{E} = 0$$

波動方程式 ⇒ 波の位相速度 c

電磁波は真空中を速さ c で伝播する。
相対的速度 $\vec{v}$ の Galilei 変換で結ばれた2つの慣性系で同じ速さとして観測されるか？
$\Longrightarrow$ $x' = x - vt$ とはなっていない

力学だけでなく電磁気学の他、全ての物理法則が「慣性系」で不変となることを要請したい

↓

Einstein の特殊相対性原理

↓ （外力の働かない物体が等速直線運動するような座標系（観測者）を「慣性系」とする。

慣性系では物理法則は不変である

※「不変」＝適切な座標変換に対して同じ形式を保つ」

※※「物理法則」に「重力の法則」は含まれない。

1-2. 光速不変の原理

特殊相対論では真空中の光速は慣性系で不変であることを要請する。

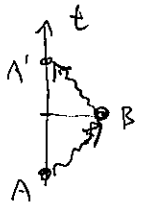
$\Rightarrow$ Galilei 変換 $\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$ を捨てて新しい変換を採用しなくてはならない。

1-3. 慣性系の構成

慣性系は3次元空間の各点に同形の時計と物差を仮想的に置いて、全ての時計を同期 (synchronize) した ようなシステムとして構成される

$\Longrightarrow$ 全ての点が $(t, \vec{x})$ という座標でラベルを付けられる

※「同期」は光を使って行なえる



$t_B = \frac{1}{2}(t_A + t_{A'})$

1-4 事象(event)と世界間隔(interval)

事象(event)は任意の基準(座標)系で測った時刻 t、空間座標 $\vec{x}$ で指定される

$$(t, \vec{x})$$

サンスクリット⇒漢語
世：時間的広がり
界：空間的広がり

慣性系 S で任意の事象 $A(t_A, \vec{x}_A)$, $B(t_B, \vec{x}_B)$ 間の世界間隔(interval)の二乗 s^2 を

$$s^2 \equiv -c^2(t_B - t_A)^2 + |x_B - x_A|^2$$

※ ここでは $(-+++)$ という符号系をとる
⇒ 素粒子論では $(+---)$ が多い

$$|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)\cdot(x_B - x_A)$$

Euclid空間での自然な内積

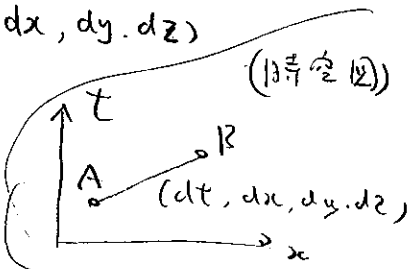
と定義する。s^2 は正、0、負、いずれも値をとれる。

※ AB間の時間・空間的へだたりが微小なとき

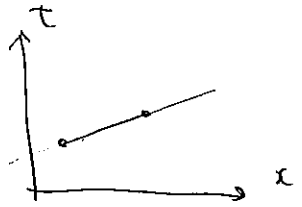
$$t_B - t_A \equiv dt, \quad x_B - x_A = (dx, dy, dz)$$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(時空図)



◎ 光線上の interval



光は任意の慣性系から見て等しい速さをもつ

$$\frac{d|\vec{x}|}{dt} = c \Rightarrow ds^2 = -c^2dt^2 + d|\vec{x}|^2 = \underline{\underline{0}}$$

光の経路に測った interval は $\underline{\underline{0}}$

S'のSに対する相対速度$\vec{v}$が一般の場合

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(t - \frac{\vec{v}}{c^2}\cdot\vec{x}\right)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right)(\vec{v}\cdot\vec{x})\frac{\vec{v}}{v^2} - \frac{t\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$v = |\vec{v}|$$

1-7. 便利な単位系

interval $\quad ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

(x, y, z) の次元 ⇒ [長さ]
t 〃 ⇒ [時間]

事象$(t, \vec{x})$の各成分の次元を統一したい

tを長さの次元で測るには？

⇒ 「1mの長さ」＝「1mの長さを光速cが進むのにかかる時間」

と解釈

(ex. 3.6 m = 3.6 × (1mの長さをcが進むのにかかる時間))

この時間の単位を使うと、

c × (1mの長さをcが進むのにかかる時間) = 1m

→ $c = \frac{1}{1} = 1$ ⇐ (cは1となる)

この単位系では

$$1\,s = 2.99792458 \times 10^8\ m$$

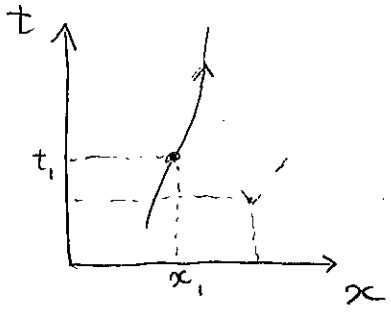
$$1\,m = \frac{1}{2.99792458 \times 10^8}\ s$$

また、

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\frac{v}{c} = v \quad (\text{無次元})$$

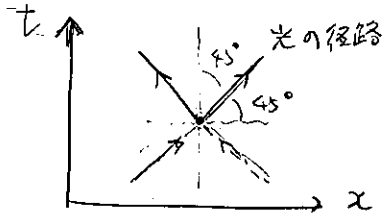
1-8. 時空図



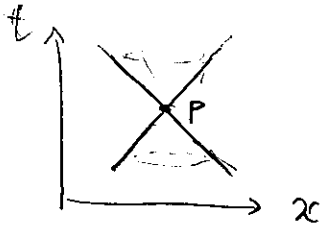
慣性系における時間と空間のダイアグラム
縦軸 — t
横軸 — 空間座標の1つ

(c=1 なので) 光は傾き±1の方へ進む

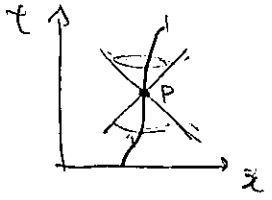
光より遅い速度の物体の運動は |微分係数| がいたるところで1より大きい曲線を描く
⇒ 物体の世界線 (world line)



◎ 任意の事象Pを通過する光の伝播を表わす図形はどの慣性系で見ても時間軸から45°の開き角をもつ円錐 (光円錐, light cone) となる



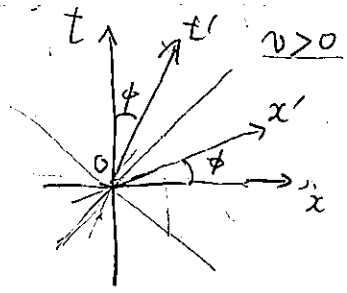
◎ 通常の物体の速さは1を超えない

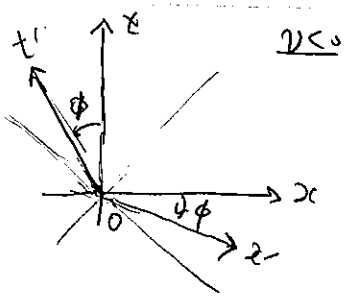


世界線は光円錐の内部に収まる

◎ 慣性系 S の時空図上で別の慣性系 S' の時空図はどう見えるか (原点は t=t'=0 で一致するとする)

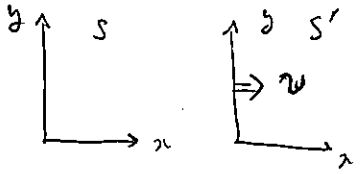
Lorentz変換 (1-6) で
$x'=0 \Rightarrow t'$軸
$t'=0 \Rightarrow x'$軸



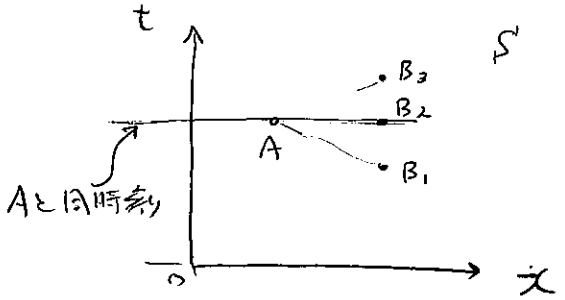


$\tan\phi = v$

1-9-1 「同時」の相対性



互いに運動する慣性系 S, S' で「同時」の概念は一致しない



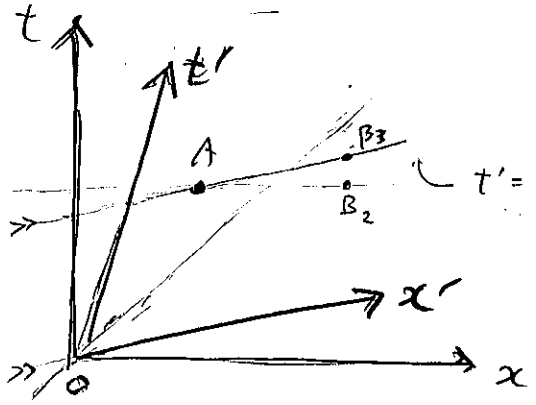
S において、異なる事象 A と B_2 は同時に起こっている

⇓

S' でも同じことが言えるか?

◎ S の時空図で見た、S' における同時刻の曲線

$t' =$ 一定



$t' = t'(A)$: S' から見た A と同時刻の線

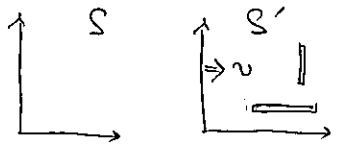
$t' =$ 一定 ⇒ $t - vx = k$ (定数)

(傾き $\frac{1}{v}$)

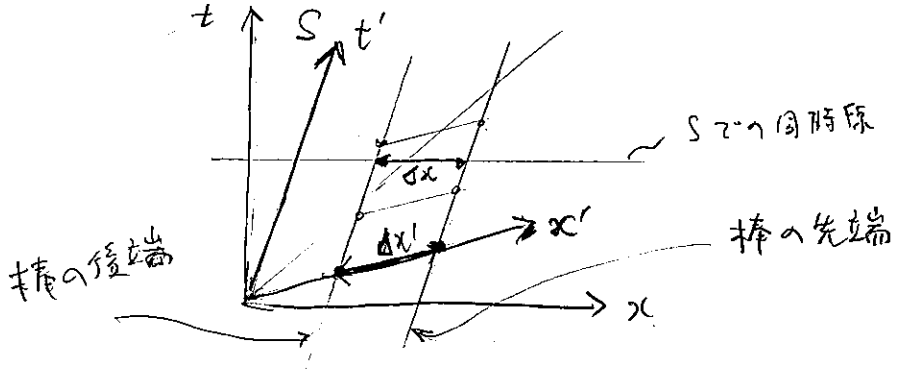
S' から見ると B_2 と A は同時でない。

1-9-2 長さの相対性

S' 系に静止している棒の長さは S 系でどう見えるか



■ 相対速度の方向に沿って置かれた棒



◎ 長さを測るには、その座標系に静止した物差で、同時に、先端と後端の位置を決定する

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\Delta t = 0 = \frac{\Delta t' + v \cdot \Delta x'}{\sqrt{1-v^2}} \Rightarrow \Delta t' = -v \cdot \Delta x'$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + v \cdot \Delta t'}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\Delta x' + v(-v \cdot \Delta x')}{\sqrt{1-v^2}}$$

Sで見た長さ

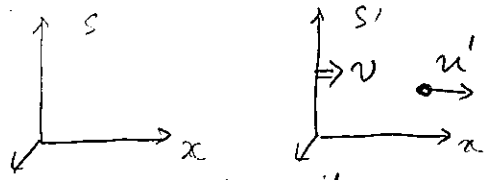
$$= \Delta x' \cdot \sqrt{1-v^2}$$

S'で見た長さ

Lorentz 収縮

◎ 運動方向と垂直に置かれた棒は Lorentz 収縮を受けない

1-10. 速度の合成



(1) S'系で速度 $\vec{u}' = (u_x', u_y', u_z')$ で運動する物体の、S系での速度 $\vec{u}$

S'系で物体が dt' 間に dx' だけ動くとすると

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'} = \vec{u}' \qquad (d\vec{x}' \equiv (dx', dy', dz'))$$

S系では $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}$

Lorentz 変換：

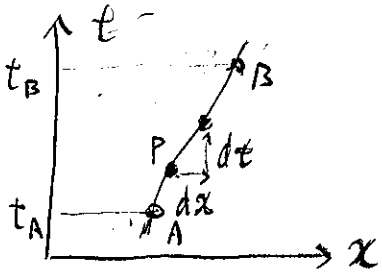
$$dt = \frac{dt' + v\,dx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz'$$

$$\therefore u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + v\,dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + v \cdot \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u_x' + v}{1 + v \cdot u_x'}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\frac{dt' + v\,dx'}{\sqrt{1-v^2}}} = \frac{u_y' \sqrt{1-v^2}}{1 + v \cdot u_x'}$$

1-11 固有時 (proper time)

物体に仮想的にくくりつけられた時計の刻む時間はどう与えられるか.



慣性系 S で見た動点 P の世界線 (t, x)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$
$$= -dt^2\left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)$$
$$= -dt^2(1 - v^2)$$

動点 P に付随する座標系 (τ, ξ) から見ると P は静止している

$\rightarrow d\xi = \vec{0}$

$$\therefore \quad ds_P^2 = -d\tau^2 + d\xi^2 = -d\tau^2$$

interval は不変なので

$$ds^2 = ds_P^2 \quad \Rightarrow \quad d\tau^2 = dt^2(1 - v^2)$$
$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2}$$

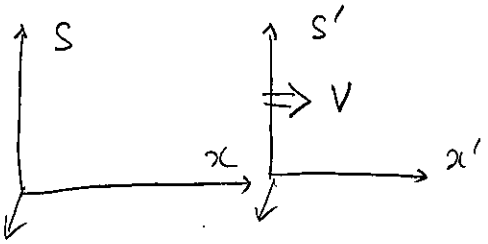
固有時 τ

P が事象 A → B へ移動したときの経過時間を P 自身が測ると

$$\tau = \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt\sqrt{1 - v^2}$$

となる

1-12 等加速度運動



S系：慣性系

S'系：x (x') 方向に等加速度直線運動

⇓

[意味　S'系で測った (x', t') について $\frac{dV'}{dt'} = a$ (一定)]

S系で (t, x)、S'系で (t', x') が対応するとする。

Lorentz 変換

$$\begin{cases} t = \dfrac{t' + Vx'}{\sqrt{1-V^2}} \\ x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1-V^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta t' \cdot \left(1 + V \cdot \frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right)}{\sqrt{1-V^2}} \quad \text{①}, \quad \Delta x = \frac{\Delta t' \left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + V\right)}{\sqrt{1-V^2}}$$

S'系での速度の増分 $\Delta V'$ (*) を S系での速度の増分と関係付ける
(速度の合成則)

$$\Delta V = \frac{\Delta V' + V}{1 + V \cdot \Delta V'} - V = \frac{(1-V^2) \cdot \Delta V'}{1 + V \cdot \Delta V'} \quad \text{②}$$

(*) S'系での速度は $0 \to \Delta V'$ と増加する

①と②より

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{(1-V^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + V \cdot \Delta V'} \cdot \frac{\Delta V'}{\Delta t'} \cdot \frac{1}{1 + V \cdot \frac{\Delta x'}{\Delta t'}}$$

ここで、$\Delta t \to 0$, $(\Delta t' \to 0)$ とすると、

$\Delta V' \to 0$, $\frac{\Delta V}{\Delta t} \to \frac{dV}{dt}$, $\frac{\Delta V'}{\Delta t'} \to \frac{dV'}{dt'} = a$, $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \to V' = 0$

(S'系から見るとS'系自身は瞬間的に静止している。)

よって

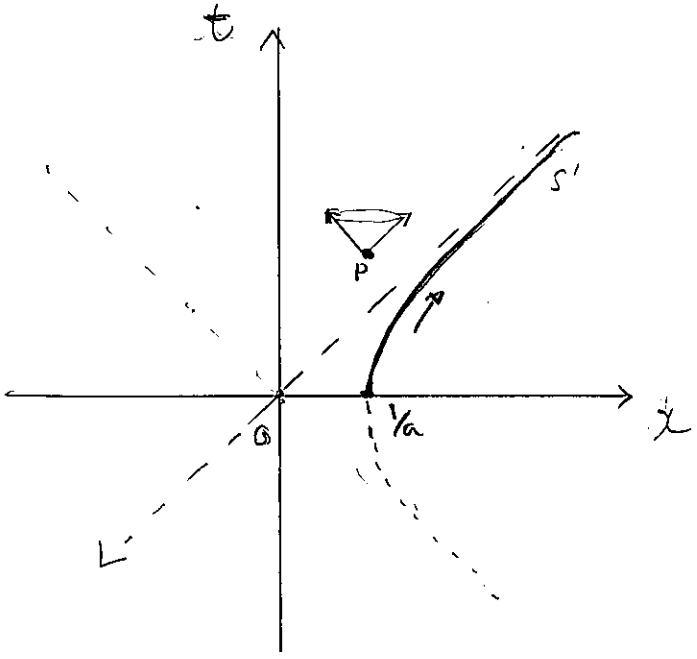
$$\frac{dV}{dt} = (1-V^2)^{\frac{3}{2}} a \quad \text{—③}$$

③の解

$$V = \frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2}} \quad \text{—④} \qquad (t=0 \text{ で } V=0 \text{ とした})$$

④を更に積分して

$$x = \frac{\sqrt{1+a^2t^2}}{a} \qquad (t=0 \text{ で } x=\frac{1}{a} \text{ とした})$$



時空図

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{a^2}$$

例えば点Pからの信号(光)は永久に S' には到達しない

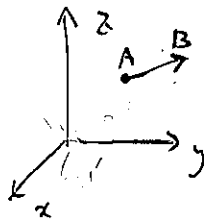
⇓

文化的曲線 L が情報が S' に到達するか否かの境界

(地平面 (horizon))

1-13 Minkowski 時空

cf. 3次元 Euclid 空間



・基底ベクトル：e_1, e_2, e_3

・内積，ノルム：$\langle e_i, e_j \rangle$

$\overrightarrow{AB} = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ と表現できる

⇓

(q_1, q_2, q_3) を $\{e_1, e_2, e_3\}$ による座標と見られる（一意的な表現）

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = \sum_i \sum_j q_i q_j \langle e_i, e_j \rangle$$

$\overrightarrow{AB}$ の長さ $|\overrightarrow{AB}|$ は基底の変換に対して不変．

$$\{e_1, e_2, e_3\} \Rightarrow \{e_1', e_2', e_3'\}$$

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \underset{\text{matrix}}{M^{-1}} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$$
$$= q_1' e_1' + q_2' e_2' + q_3' e_3$$

$|\overrightarrow{AB}|$ は不変 このとき $\sum_{i'} \sum_{j'} q_{i'}' q_{j'}' \langle e_{i'}', e_{j'}' \rangle = \sum_i \sum_j q_i q_j \langle e_i, e_j \rangle$

ただし $\begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$

これと同様に変換する3成分量 ⇒ ベクトル

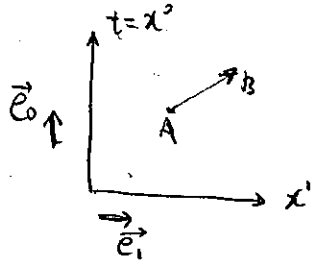
$|\overrightarrow{AB}|^2$ のように，変換で不変な量 ⇒ スカラー

多重線型変換を受ける量 ⇒ テンソル

$$T_{i'j'} = \sum_l \sum_k M_{i'k} M_{j'l} T_{kl}$$

■ 空間方向の基底 & 時間方向の基底 の4つの基底をもつ
4次元空間を考える

$$\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \qquad \vec{e}_1 = e_1,\ \vec{e}_2 = e_2,\ \vec{e}_3 = e_3$$



$$\vec{AB} = x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3$$
$$(= x\vec{e}_0 + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)$$

$\vec{AB}$ の"長さ"

$$\vec{AB}^2 \equiv -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad \text{—①}$$

(cf. (dt, dx, dy, dz) の interval ds^2
$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$)

$\vec{AB}^2$ は Lorentz 変換により不変となっている

このような"長さ"(距離)の定義をもつ空間を Minkowski 時空と呼ぶ

■ ①を行列 $(\eta_{\mu\nu})$ (μ, ν は0〜3) を使って次のように書く.

$$(\eta_{\mu\nu}) \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

$$\vec{AB}^2 = \eta_{00}(x^0)^2 + \eta_{11}(x^1)^2 + \eta_{22}(x^2)^2 + \eta_{33}(x^3)^2$$
$$= \sum_\nu \sum_\mu \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$
$$= \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

- Einstein の記法

上下に同じ添字(index)があるときは0〜3の総和を意味する

ex: $\eta_{\alpha\mu} x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \eta_{\alpha\mu} x^\mu = \eta_{\alpha 0} x^0 + \eta_{\alpha 1} x^1 + \eta_{\alpha 2} x^2 + \eta_{\alpha 3} x^3$

μ: ダミー添字

α: 自由な添字

[1-14] スカラー，ベクトル，テンソル

◎ スカラー，ベクトル，テンソルの"classical"な定義

○ スカラー ＝ Lorentz変換によって不変な量

ex. interval $ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

○ ベクトル（反変ベクトル）

Lorentz変換により座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ と同じ形の変換を受ける量

$x^{\mu'} = L^{\mu'}{}_{\alpha}\, x^\alpha$ とするとき

[cf.

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

]

$V^{\mu'} = L^{\mu'}{}_{\alpha} V^\alpha$ の形に変換される量 V^α $(\alpha = 0 \sim 3)$ をベクトル（反変ベクトル）とする。

※ このような変換規則は物理法則の方程式がLorentz変換に対して形式を変えないようにするために必要である。

ex. 4元速度 (4-velocity)

物体のMinkowski時空内での微小変位 dx^μ $(\mu = 0 \sim 3)$ を物体の固有時 $d\tau$（定義よりスカラー）で割ったもの

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{（物体の4元速度）}$$

u^μの"長さの2乗"（ノルム）はスカラー

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu}{(d\tau)^2} = \frac{(ds)^2}{(d\tau)^2} = -1$$

○ 共変ベクトル

Lorentz 変換の逆変換によって変換される量

$x^{\mu'} = L^{\mu'}{}_{\alpha}\, x^{\alpha}$ のとき

$\omega_{\nu'} = L_{\nu'}{}^{\alpha}\, \omega_{\alpha}$ $\qquad \left(L_{\nu'}{}^{\alpha} L^{\mu'}{}_{\alpha} = \delta_{\nu'}^{\mu'} \right)$

となる ω_{α} を共変ベクトルという

ex. スカラー関数 $\phi(x^{\mu})$ の 4次元 gradient

$$\omega_{\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \qquad (\mu = 0 - 3)$$

○ テンソル

Lorentz 変換によって多重線形変換を受ける量

$$A^{\mu'\nu'} = L^{\mu'}{}_{\alpha} L^{\nu'}{}_{\beta} A^{\alpha\beta}$$

のように変換する量を 2階の反変テンソルという $(4 \times 4 = 16$ 成分$)$

$$B_{\mu'\nu'} = L_{\mu'}{}^{\alpha} L_{\nu'}{}^{\beta} B_{\alpha\beta}$$

のように変換する量を 2階の共変テンソルという

$$C^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = L^{\lambda'}{}_{\alpha} L_{\mu'}{}^{\beta} L_{\nu'}{}^{\gamma} C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$$

3階の混合テンソル $(4 \times 4 \times 4 = 64$ 成分$)$

ex. テンソル積

ベクトル V^{μ}, U^{μ}, ω_{α}, テンソル $T^{\mu\nu}$ などの<u>直積</u>

$U^{\mu} V^{\nu}$: 2階の反変テンソル

$V^{\mu} \omega_{\alpha}$: 〃 混合 〃

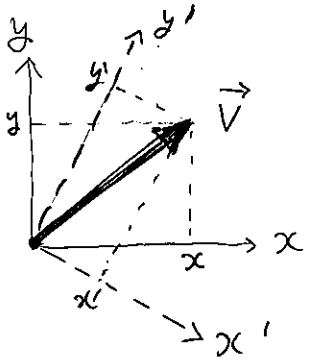
$\omega_{\alpha} T^{\mu\nu}$: 3階の 〃

ex. メトリックテンソル

interval を定義する $\eta_{\mu\nu}$ ⟷ 2階共変テンソル

⑥ ベクトル，テンソルの "modern" な見方

〈1〉 幾何学的なベクトル ⇒ 座標変換によって不変
（変化するのは座標のとり方による成分）



ベクトル $\vec{V}$ は x, y 軸 あるいは x', y' 軸を座標にとるかによってその成分は変わるが「本体の」ベクトルは同じもの。

→ 基底の取り換えによる表示の違い

○ Minkowski 時空における正規直交基底

慣性系 S (t, x, y, z) ⇒ $\vec{e}_{(t)}$, $\vec{e}_{(x)}$, $\vec{e}_{(y)}$, $\vec{e}_{(z)}$

〃 S' (t', x', y', z') ⇒ $\vec{e}_{(t')}$, $\vec{e}_{(x')}$, $\vec{e}_{(y')}$, $\vec{e}_{(z')}$

それぞれの座標系で見ると

S系では
$$\vec{e}_{(t)} = \overset{t\ \ x\ \ y\ \ z}{(1, 0, 0, 0)}$$
$$\vec{e}_{(x)} = (0, 1, 0, 0)$$
$$\vec{e}_{(y)} = (0, 0, 1, 0)$$
$$\vec{e}_{(z)} = (0, 0, 0, 1)$$

S'系では
$$\vec{e}_{(t')} = \overset{t'\ \ x'\ \ y'\ \ z'}{(1, 0, 0, 0)}$$
$$\vec{e}_{(x')} = (0, 1, 0, 0)$$
$$\vec{e}_{(y')} = (0, 0, 1, 0)$$
$$\vec{e}_{(z')} = (0, 0, 0, 1)$$

※ 例えば S系で見た $\vec{e}_{(t')}$ の成分は (1, 0, 0, 0) でない

> 基底の変換はどう定義する？

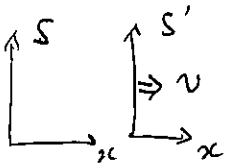
$$\vec{V} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S系での成分}}}{V^{\mu}}\vec{e}_{(\mu)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S'系での成分}}}{V^{\alpha'}}\vec{e}_{(\alpha')}$$

「成分」は $V^{\alpha'} = \underset{\text{Lorentz変換}}{L^{\alpha'}{}_{\mu}} V^{\mu}$ としたいので

$\vec{e}_{(\beta')} = L_{\beta'}{}^{\nu}\vec{e}_{(\nu)}$ というように、基底の（ ）付きindexの変換は成分 V^{α} と逆になるように変換すればよい

ex. 慣性系 S' と S の Lorentz 変換が

$$L^{\mu'}{}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



のとき.

$$L_{\nu'}{}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なので

$$\vec{e}_{(t')} = L_{t'}{}^{\beta}\vec{e}_{(\beta)} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\vec{e}_{(t)} + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\vec{e}_{(x)}$$

$$\vec{e}_{(x')} = L_{x'}{}^{\beta}\vec{e}_{(\beta)} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\vec{e}_{(t)} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\vec{e}_{(x)}$$

$$\vec{e}_{(y')} = \vec{e}_{(y)} \quad , \quad \vec{e}_{(z')} = \vec{e}_{(z)}$$

S 系での $\vec{e}_{(t)} = (1,0,0,0)$, $\vec{e}_{(x)} = (0,1,0,0)$

より. S 系での $\vec{e}_{(t')}$, $\vec{e}_{(x')}$ の成分は.

$$\vec{e}_{(t')} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0\right)$$

$$\vec{e}_{(x')} = \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0\right)$$

〈2〉 基底ベクトル

一般のベクトル空間において、線型独立な任意のベクトルの組が一般の基底を作る。

$\Lambda_\alpha{}^\mu$ を 正則な行列として

$$\vec{u}_{(\alpha)} = \Lambda_\alpha{}^\mu \vec{e}_{(\mu)}$$

と書ける $\vec{u}_{(\alpha)}$ $(\alpha = 0 \sim 3)$ の組も基底となる。

☆ ある座標系で一つの成分が 1 で、その他は 0 となるようなベクトルの組 $(\vec{e}_{(\mu)})$ で作られる基底を座標基底と呼ぶ。

> 座標基底 $\vec{e}_{(\mu)}$ の α-成分は δ_μ^α である。

> Minkowski 時空上のスカラー関数 $f(x^\mu)$ の微分値 $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ は座標基底と同じ変換をする。

$x^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_\mu x^\alpha$ として、

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} = L_{\alpha'}{}^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = L_{\alpha'}{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{e}_{(\alpha')} = L_{\alpha'}{}^\mu \vec{e}_{(\mu)}$$

そこで、座標基底 $\vec{e}_{(\mu)}$ を $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$ と書く notation を導入できる。

$$\left(\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &= (t, x, y, z) \end{aligned} \right)$$

$$\vec{e}_{(\mu)} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$$

← ベクトルを意味する

ex.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = (\overset{t}{1}, \overset{x}{0}, \overset{y}{0}, \overset{z}{0})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = (0, 1, 0, 0)$$

<3> 双対基底と1形式(1-form)

Minkowski時空を含む一般のベクトル空間 V に対して
その<u>双対空間</u> V^* を次のような要素の集合として
定義できる

- V^* の要素は通常のベクトル空間の公理(線形性)を満たす

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\omega},\tilde{\mu}\in V^* \\ a,b\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow a\tilde{\omega}+b\tilde{\mu}\in V^*$$

- V^* の要素は V 上の線型写像(線型演算子)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u},\vec{v}\in V \\ \tilde{\omega}\in V^* \\ a,b\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\tilde{\omega}(\vec{u})\in\mathbb{R} \\ \tilde{\omega}(a\vec{u}+b\vec{v})=a\tilde{\omega}(\vec{u})+b\tilde{\omega}(\vec{v})\end{array}$$

※逆に V の要素を V^* 上の線型関数と見ることも可能

ベクトル空間 V の双対空間 V^* の要素を <u>1形式(1-form)</u>
と呼ぶ。
(covector とも)

双対空間の基底として V の座標基底 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\vec{e}_{(\mu)}$ に対して次の
条件を満たす「双対空間の座標基底」がとれる。

$$\tilde{\omega}^{(\alpha)}\in V^*,\qquad \tilde{\omega}^{(\alpha)}(\vec{e}_{(\mu)})=\delta_\mu{}^\alpha$$

これを $\vec{e}_{(\mu)}$ の双対基底といい <u>dx^α</u> と書く

$$dx^\alpha(\vec{e}_{(\mu)})=dx^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)=\delta^\alpha{}_\mu$$

ex.) スカラー関数 ϕ の勾配 (gradient)

ϕ の勾配 $\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}$ を成分とする 1-form $d\phi$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\cdot dx^\alpha$$

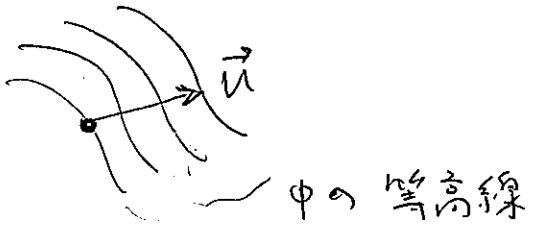
> ベクトルの線形関数としての gradient の意味

$\vec{u} = u^\beta\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$ に対して

$$d\phi(\vec{u}) = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\cdot dx^\alpha\left(u^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}u^\beta\cdot\underbrace{dx^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)}_{\delta^\alpha_\beta}$$

$$= u^\alpha\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}$$

これは $\vec{u}$ の方向に ϕ がどれだけ変化するか、を表す。



$d\phi(\vec{u}) = u^\alpha\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}$ は、$\vec{u}$ が ϕ の等高線を貫く本数を与える。

<5> テンソル

一般のテンソルは ベクトルと 1-form の直積空間から、実数 $\mathbb{R}$ への多重線型写像として定義

ex. $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\tilde{\omega}, \tilde{\sigma} \in V^*$

$a, b, r, s \in \mathbb{R}$ として

$$T(a\vec{u}+b\vec{v}, r\tilde{\omega}+s\tilde{\sigma}) = ar\cdot T(\vec{u},\tilde{\omega}) + as\cdot T(\vec{u},\tilde{\sigma}) + br\cdot T(\vec{v},\tilde{\omega}) + bs\cdot T(\vec{v},\tilde{\sigma}) \in \mathbb{R}$$

T は $\binom{1}{1}$ テンソルという。

$(T : V\otimes V^* \to \mathbb{R})$

☆ テンソルの座標基底に対する成分

$\binom{m}{n}$ テンソルの座標基底は m 個のベクトル基底と

n 個の双対基底の直積として構成できる

ex.) $\binom{2}{0}$ テンソル $\mathbb{U}$ の成分 $U^{\mu\nu}$ は次のように定義

$$U^{\mu\nu} = \mathbb{U}(\underset{\uparrow}{dx^\mu}, \underset{\uparrow}{dx^\nu})$$

1-form

これに対する基底は $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$ の直積である.

$$\mathbb{U} = \sum_\alpha \sum_\beta U^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \underset{\uparrow}{\otimes} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = U^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$$

直積

実際. $\mathbb{U}(dx^\mu, dx^\nu) = U^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)(dx^\mu) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)(dx^\nu)$

ベクトルを 1-form の線型関数とみる

$$= U^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu$$

$$= U^{\mu\nu}$$

ex). $\binom{0}{2}$ テンソル $\mathbb{G}$ の成分表示,

$$\mathbb{G} = G_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

一般の場合も同様

※ 直積の記号「$\otimes$」は煩雑なので省略することが多い

$$\mathbb{G} = G_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta = G_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

> 計量 (metric) テンソル — $\binom{0}{2}$ 対称テンソル

$$\eta = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu \quad ; \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

〈4〉 1-form の成分と座標変換

ある慣性系の座標基底によって任意の 1-form を展開

$$\tilde{\omega} = \underbrace{\omega_\alpha}_{\text{成分}} dx^\alpha$$

☆ 1-form の成分は「共変ベクトル」と呼ばれるものと同じになる。（以下参照）

• 基底 dx^α の Lorentz 変換

慣性系 $S \to S'$ の Lorentz 変換 $L^{\mu'}{}_\alpha$ $(x^{\mu'} = L^{\mu'}{}_\alpha x^\alpha)$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} = L_{\nu'}{}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

いま $dx^{\mu'} = Q^{\mu'}{}_\lambda dx^\lambda$ と Lorentz 変換されるとする

定義より
$$dx^{\mu'}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}\right) = \delta^{\mu'}{}_{\nu'} = Q^{\mu'}{}_\lambda dx^\lambda \left(L_{\nu'}{}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$$
$$= Q^{\mu'}{}_\lambda L_{\nu'}{}^\beta \underbrace{dx^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)}_{\delta^\lambda_\beta}$$
$$= Q^{\mu'}{}_\lambda L_{\nu'}{}^\lambda$$

これは $Q^{\mu'}{}_\lambda$ が $L_{\nu'}{}^\lambda$ の逆 $L^{\mu'}{}_\lambda$ に等しいことを示す。

$$\therefore \quad dx^{\mu'} = L^{\mu'}{}_\lambda dx^\lambda$$

変換性はベクトルの成分と同じ

では成分はどう変換するか？

1-form $\tilde{\omega}$ はベクトル同様に座標のとり方によらない

$$\tilde{\omega} = \omega_{\mu'} dx^{\mu'} = \omega_\alpha dx^\alpha$$
$$\downarrow$$
$$\omega_{\mu'} L^{\mu'}{}_\alpha dx^\alpha = \omega_\alpha dx^\alpha$$
$$\longrightarrow \quad \omega_{\mu'} L^{\mu'}{}_\alpha = \omega_\alpha \quad \text{or} \quad \omega_{\mu'} = L_{\mu'}{}^\alpha \omega_\alpha$$

つまり $\tilde{\omega}$ の成分は「共変ベクトル」である。

> ベクトルと 1-form のスカラー積

$\vec{v} = v^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$, $\tilde{\omega} = \omega_\beta dx^\beta$ に対して

$$\tilde{\omega}(\vec{v}) = \vec{v}(\tilde{\omega}) = \langle \tilde{\omega}, \vec{v} \rangle$$

$$= \omega_\beta \cdot dx^\beta \left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$= \omega_\beta v^\alpha \cdot \underbrace{dx^\beta\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)}_{\delta_\alpha^\beta}$$

$$= v^\alpha \omega_\alpha$$

> 計量テンソルを介して ベクトル ⇔ 1-form の自然な対応付けができる （「添字の上げ下げ」）

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = v^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \\ \eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \end{array}\right\} \longrightarrow \tilde{v} \equiv \eta(\vec{v}, \quad)$$

空白

$$= \eta_{\mu\nu} dx^\mu(\vec{v}) \otimes dx^\nu$$

$$= \eta_{\mu\nu} dx^\mu \left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \otimes dx^\nu$$

$$= \eta_{\mu\nu} v^\alpha \cdot \underbrace{dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)}_{\delta^\mu_\alpha} \otimes dx^\nu$$

$$= \underbrace{v^\mu \eta_{\mu\nu}}\ \underbrace{dx^\nu}$$

$v_\nu \equiv v^\mu \eta_{\mu\nu}$ と定義される係数をもつ 1-form

$\binom{0}{2}$ 計量テンソル $\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ に対して、

$$\overleftrightarrow{\eta} \equiv \eta^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) \quad , \quad \eta^{\alpha\beta} \equiv \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

となる $\binom{2}{0}$ テンソル $\overleftrightarrow{\eta}$ を導入すると、

$\tilde{\omega} = \omega_\lambda dx^\lambda$ に対して $\vec{\omega} \equiv \overleftrightarrow{\eta}(\tilde{\omega}, \quad) = \eta^{\alpha\beta} \omega_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$

となる $\vec{\omega}$ が自然に定義できる。

※ η と $\overleftrightarrow{\eta}$ の成分は互いに逆 : $\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$

※※ $\vec{u} = (a, b, c, d)$ なるベクトルに対して
$\tilde{u} = (-a, b, c, d)$ となることに注意

> 縮約 (contraction)

$\binom{m}{n}$ テンソルから $\binom{m-1}{n-1}$ テンソルを導く操作

ex)
$$\mathbb{R} = R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\lambda} \otimes dx^{\kappa}$$

$\binom{1}{3}$ テンソル

$\downarrow$ μ と λ を縮約

$\binom{0}{2}$ テンソル

空白

$$\sum_{\sigma} \mathbb{R}\left(dx^{\sigma}, \ , \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}, \ \right)$$

$$= \sum_{\sigma} R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(dx^{\sigma})} \cdot dx^{\nu} \cdot \underbrace{dx^{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\right)} \otimes dx^{\kappa}$$

$$= \sum_{\sigma} R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa}\, \delta^{\sigma}_{\mu}\, \delta^{\lambda}_{\sigma}\, \underbrace{dx^{\nu} \otimes dx^{\kappa}}_{\text{基底}}$$

$$= R^{\sigma}{}_{\underline{\nu}\,\sigma\,\underline{\kappa}}\, dx^{\nu} \otimes dx^{\kappa}$$

> 対称、反対称テンソル

成分のベクトル的添字の任意の2つを入れ換えたとき
(1形式的)

- 値が変化しない ⇒ 対称、
- 逆符号 ⇒ 反対称、

ex. 計量テンソル η は $\binom{0}{2}$ 対称テンソル

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$$

Levi-Civita テンソル

$\binom{0}{4}$: $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = \begin{cases} +1 & ((\mu,\nu,\lambda,\sigma)\text{が}(0,1,2,3)\text{の偶置換}) \\ -1 & (\quad〃\quad \text{奇}〃) \end{cases}$

> テンソルの対称・反対称化

成分の添字を対称化
反対称化

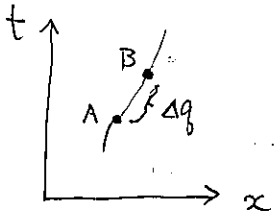
$$U^{\mu\nu} = \underbrace{\frac{1}{2}(U^{\mu\nu}+U^{\nu\mu})}_{\text{対称部分}} + \underbrace{\frac{1}{2}(U^{\mu\nu}-U^{\nu\mu})}_{\text{反対称部分}} \qquad \text{恒等式}$$

$F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ に対して、

$$F^{\alpha}{}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(F^{\alpha}{}_{\mu\nu} + F^{\alpha}{}_{\nu\mu})$$

$$F^{\alpha}{}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(F^{\alpha}{}_{\mu\nu} - F^{\alpha}{}_{\nu\mu})$$

> テンソルの微分



時空間内に任意の曲線を考え、それがパラメータ q で表わされるとする

$$x^{\mu} = x^{\mu}(q)$$

$A(x^{\mu}(q))$, $B(x^{\mu}(q+\Delta q))$ でのテンソル $\mathbb{T} \equiv \underbrace{T^{\mu}{}_{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)\otimes dx^{\nu}}_{(1,1)\text{ テンソル}}$ の差分

$$\frac{1}{\Delta q}\{\mathbb{T}(B)-\mathbb{T}(A)\}$$

$$= \frac{1}{\Delta q}\left\{T^{\mu}{}_{\nu}(q+\Delta q)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)_B \otimes (dx^{\nu})_B - T^{\mu}{}_{\nu}(q)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)_A \otimes (dx^{\nu})_A\right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta q}\cdot\{T^{\mu}{}_{\nu}(q+\Delta q) - T^{\mu}{}_{\nu}(q)\}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)\otimes (dx^{\nu})$$

Minkowski 時空で、Cartesian 座標 (t, x, y, z) をとると、$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)_A = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)_B$, $(dx^{\nu})_A = (dx^{\nu})_B$

そこで、$\Delta q \to 0$ とすれば、$\mathbb{T}$ の微分が定義できる

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{1}{\Delta q} \left\{ T^{\mu}{}_{\nu}(q+\Delta q) - T^{\mu}{}_{\nu}(q) \right\}$$

$$= \frac{dT^{\mu}{}_{\nu}}{dq} = \frac{dx^{\lambda}}{dq} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T^{\mu}{}_{\nu}$$

$\frac{dx^{\lambda}}{dq}$ は 4元ベクトル $\frac{dx^{\lambda}}{dq} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\right)$ の成分

$$\Rightarrow \quad \frac{dT^{\mu}{}_{\nu}}{dq} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T^{\mu}{}_{\nu}\right) \underbrace{(dx^{\lambda})}_{\text{1-form}} \left(\underbrace{\frac{dx^{\lambda}}{dq} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\right)}_{\text{vector}} \right)$$

つまり、

$$\frac{d}{dq}\mathbb{T} = \frac{\partial T^{\mu}{}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}} \left(dx^{\lambda} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \otimes dx^{\nu} \right) \left(\frac{dx^{\lambda}}{dq} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}, \ \ , \ \ \right)$$

空白

と考えられる

(このベクトルに (dx^{λ}) を作用させる)

曲線 $x^{\mu}(q)$ と $\frac{dx^{\mu}}{dq}$ は任意なので、テンソル $\mathbb{T}$ の微分 $\nabla\mathbb{T}$ は

$$\mathbb{T} = T^{\mu}{}_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) \otimes dx^{\nu} \xrightarrow{\nabla} \nabla\mathbb{T} = \partial_{\lambda} T^{\mu}{}_{\nu} \cdot dx^{\lambda} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) \otimes dx^{\nu}$$

$$\left(\text{cf. } \partial_{\lambda} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^{\lambda}} \right)$$

とすればよい。

一般に テンソルの微分 ∇ は $\binom{m}{n}$ テンソルを $\binom{m}{n+1}$ テンソルに変える。

ex. スカラー関数 ψ の勾配

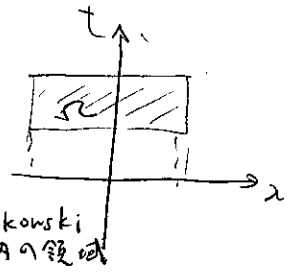
$$\nabla\psi = \partial_{\lambda}\psi \cdot dx^{\lambda} \qquad \binom{0}{1} \text{ テンソル (1-form)}$$

ex. 計量テンソル η

$$\partial_{\lambda}\eta_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla\eta = \mathbb{0} \qquad (\mathbb{0} = 0 \cdot dx^{\lambda} \otimes dx^{\mu} \otimes dx^{\nu})$$

● 積分.

○ 積分は基本的にスカラー量に対して行う操作 (3次元でも同様)



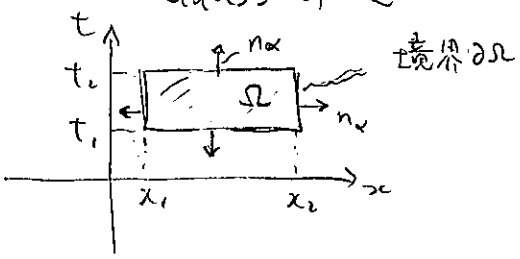
Ω: Minkowski 時空内の領域

$$I = \int_\Omega dt\, d^3x\, \phi(t, x^i) = \int_\Omega d^4x\, \phi(x^\mu)$$

(ベクトル量の積分は一般に共変的に定義できない)

「ベクトル」の関与する積分 ⇒ Gauss, Stokes の定理

○ Gauss の定理



4次元積分　3次元積分

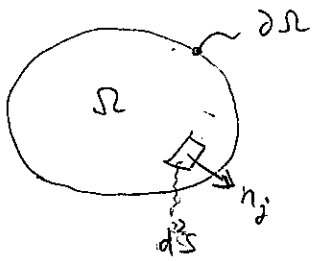
$$\int_\Omega d^4x \cdot \partial_\mu V^\mu = \oint_{\partial\Omega} dS_\alpha V^\alpha$$

$$dS_\alpha \equiv \underbrace{d^3s}_{\text{3次元体積要素}}\, n_\alpha$$

外向き法線

---

cf. 3次元での Gauss 定理



3次元積分

$$\int_\Omega d^3x \cdot \mathrm{div}\,\mathbf{U} = \int_\Omega d^3x \sum_{i=1}^{3} \partial_i U^i$$

2次元積分

$$= \oint_{\partial\Omega} dS_j\, U^j$$

$$dS_j = d^2s\, n_j$$

● 時間的・空間的・ヌル的

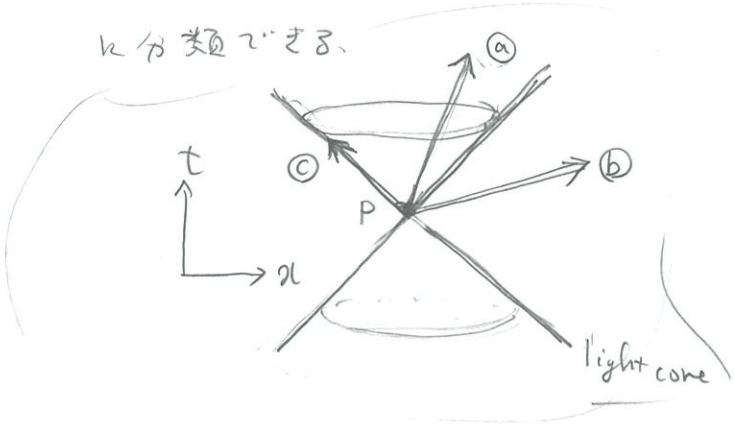
4元ベクトル v^μ はその ノルムの符号によって

時間的 (timelike) : $v^\mu v_\mu < 0$

空間的 (spacelike) : $v^\mu v_\mu > 0$

ヌル的 (null) : $v^\mu v_\mu = 0$

に分類できる。



ⓐ : timelike
ⓑ : spacelike
ⓒ : null

- 通常の物体は光速を超える運動をできない。

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 = -\Delta t^2\left(1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\right) < 0$$

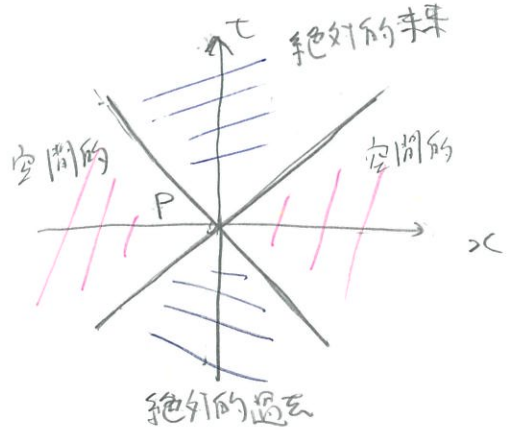
$\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| < 1$

↓

速度は timelike なベクトルになる。

- 光子 ⇒ null なベクトルを速度としてもつ

⇒ 時空上でPと因果関係を持てる点は timelike or null の領域にある。



▷ Pと、「timelike かつ 第0成分が正(負)」な(反変)ベクトルで結ばれる点
⇒ Pの絶対的未来(過去)にある

▷ Pと spacelike なベクトルで結ばれる点
⇒ Pと空間的な関係にある

1-15 4元運動量

質量 m の質点の相対論的な運動量を
3次元の拡張として定義する

$$p^\mu = m u^\mu \qquad u^\mu : \text{質点の4元速度}$$
$$(\mu = 0 \sim 3)$$

◎ 物体が遅いときの4元運動量

物体の3次元速度 $(\overset{x}{v}, \overset{y}{0}, \overset{z}{0})$ としたとき

$$u^\mu = \Big(\underset{t}{\frac{dt}{d\tau}}, \underset{x}{\frac{dx}{d\tau}}, \underset{y}{0}, \underset{z}{0}\Big)$$

$$-1 = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = 1$$

$$\underset{=}{\frac{dx}{dt}} = v \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\therefore \; u^\mu = \Big(\overset{t}{\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}}, \overset{x}{\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}}, \overset{y}{0}, \overset{z}{0}\Big)$$

$v \ll 1 \; (v/c \ll 1)$

$$p^1 = m u^1 = m \cdot \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = mv\left\{1 + \frac{v^2}{2} + \cdots\right\} \qquad v \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)$$

v の3次以上を無視すると

$$p = mv \longrightarrow \text{3次元での運動量の定義の自然な拡張}$$

$$p^0 = m u^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m\left\{1 + \frac{1}{2}v^2 + \cdots\right\}$$

通常の単位系では

$$p^0 = mc^2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \cdots\right\} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$$

第2項：運動エネルギー
第1項：静止(質量)エネルギー　　"$E = mc^2$"

p^0 は物体の力学的エネルギーを表す。

※ $\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ より、$\underline{\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2}$ の関係がある。

※※ エネルギーを、3次元運動量 p^i として
$p^\mu = (\varepsilon, p^i)$; $\varepsilon = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$, $p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2}}$ $\Rightarrow$ $\underline{p^i = \varepsilon v^i}$; $\underline{\varepsilon^2 = m^2 + \mathbb{P}^2}$
$(\mathbb{P} = p^i e_i)$

1-16 粒子の力学

■ 物理法則は Lorentz 変換によって不変（特殊相対性原理）

⇒ 物理法則の方程式の両辺は同じ型のテンソルで表わされている必要

3次元での質点の運動方程式

$$\frac{d}{dt}p^i = f^i$$

⇓

4次元に拡張するには？

（注 t：スカラーではない　p^i, f^i：ベクトルではない）

$t \to \tau$，$p^i \to p^\mu$，$f^i \to F^\mu$

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = F^\mu$$ という形にすればよい？

（p^μ：4元運動量，F^μ：4元力
τ：粒子の固有時）

粒子の速さ $v \ll 1$ で $\tau \to t$　$p^i \to p^i$（3次元）

- F^μ の空間成分（$\mu=1\sim3$）は $v \ll 1$ で f^i（$i=1\sim3$）に帰着するように定義できていればよい

- F^0 は？

$$\frac{d}{d\tau}(\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu) = \frac{d}{d\tau}(-m^2) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{p^0\frac{d}{d\tau}p^0}_{F^0} = \sum_{i=1}^{3} p^i \underbrace{\frac{dp^i}{d\tau}}_{F^i}$$

$$\therefore\ F^0 = \frac{\sum_{i=1}^{3} p^i F^i}{p^0}$$

$v \ll 1$ で $p^i \to p^i$，$F^i \to f^i$，$p^0 \to m$

よって $F^0 \to \sum_{i=1}^{3}\frac{p^i}{m}F^i = \sum_{i=1}^{3} v^i f^i$　（力積，仕事率）

● (3次元的な)外力の働かない場合

$$F^i = 0 \rightarrow F^0 = \frac{1}{p^0}\sum_{i=1}^{3} p^i F^i = 0$$

このとき $\frac{d}{d\tau}p^\mu = 0 \Rightarrow p^\mu =$ これらず一定

p^0 の保存 ⇒ エネルギー保存

p^i 〃 ⇒ 運動量保存

1-17 光

光は $ds^2 = 0$ となる2次元的世界線を描く

その4元運動量を

$q^\mu = (q^0, \mathbf{q})$ とすると

$q^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ とは書けない

∵ 固有時 $d\tau = 0$

むしろ逆に、$q^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ となるスカラーパラメータ λ を、$d\lambda \neq 0$ となるように導入して

光の4元運動量を $q^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ のように書く、と考える。

光子の運動量 q^μ のノルム

$$\eta_{\mu\nu} q^\mu q^\nu = \eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \sim \frac{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{(d\lambda)^2} = 0$$

$$-(q^0)^2 + \mathbf{q}^2 = 0 \Rightarrow q^0 = \pm|\mathbf{q}|$$

q^0 を 光子のエネルギー
$\mathbf{q}$ を 〃 運動量 と すると $q^0 > 0$

$\longrightarrow q^0 = |\mathbf{q}|$

cf. 量子論

光子の エネルギー $\hbar\omega$
運動量 $\hbar\mathbf{k}$] $-\omega^2 + \mathbf{k}^2 = 0$ 分散関係

$\hbar\omega \Rightarrow q^0$

$\hbar\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{q}$

1-18 観測者の4元速度と粒子のエネルギー・運動量

ある観測者 $\mathcal{O}$ の4元速度 u^μ
粒子（光）の4元運動量 p^μ

→ $\mathcal{O}$ の観測する粒子のエネルギー

〃 運動量

WEPから 10/8

特に、$\mathcal{O}$ の静止系で考えると、$u^\mu = (1, 0, 0, 0)$
時間成分しかない

この座標系での $p^\mu = (\varepsilon, p^i)$ とすると、$(i=1\sim3)$

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu p^\nu = (-1) \times 1 \times \varepsilon = -\varepsilon$$

$$\rightarrow \varepsilon = -\eta_{\mu\nu} u^\mu p^\nu \quad \text{—①}$$

また、

$$(u_\mu u^\alpha + \delta_\mu{}^\alpha) p^\mu = (p^\mu u_\mu) u^\alpha + p^\alpha$$

3次元のゼロベクトル

$$= (-\varepsilon, \mathbf{0}) + (\varepsilon, \mathbf{p})$$

$$= (0, \mathbf{p})$$

よって、"3元運動量" $= (u_\mu u^\alpha + \delta_\mu{}^\alpha) p^\mu$ —②

①、②はテンソル演算で定義されているので、u^μ が任意の成分をもつ座標系（$\mathcal{O}$ の静止系以外）でも成立。

※ $P_\alpha{}^\mu = u_\alpha u^\mu + \delta_\alpha{}^\mu$

$P_{\alpha\mu} = u_\alpha u_\mu + \eta_{\alpha\mu}$, $P^{\alpha\mu} = u^\alpha u^\mu + \eta^{\alpha\mu}$

を u^μ に垂直な方向に射影する操作を表わすテンソルと見られる

(projection tensor)

1-19 電磁気学

Maxwell 方程式

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbb{E} = 4\pi\rho_e \\ \nabla\times\mathbb{B} = \dfrac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbb{J} \\ \nabla\times\mathbb{E} + \dfrac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla\cdot\mathbb{B} = 0 \end{cases}$$

$(c=1)$

実は共変的だが、一見するとそう見えない

- Maxwell 方程式の4次元表現

○ 電磁場テンソル：2階、反対称

$$F_{\mu\nu} \equiv \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & B^z & -B^y \\ E^y & -B^z & 0 & B^x \\ E^z & B^y & -B^x & 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ t \\ x \\ y \\ z \end{array}$$

○ 4元電流

$$J^\mu \equiv \begin{pmatrix} \rho_e \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_e \\ \mathbb{J} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = 4\pi\rho_e$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}E^i = 4\pi J^0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}(-F_0{}^i) = 4\pi J^0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}F^{0i} = 4\pi J^0 \qquad (\eta^{00}F_0{}^i = \ominus F^{0i})$$

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu}F^{0\mu} = 4\pi J^0 \qquad (F^{00}=0)$$

$$\nabla\times\mathbb{B} - \frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} = 4\pi\mathbb{J}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}B^z - \frac{\partial}{\partial z}B^y - \frac{\partial}{\partial t}E^x = 4\pi J^x \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(F^{10}) + \frac{\partial}{\partial y}F^{12} + \frac{\partial}{\partial z}(F^{13}) = 4\pi J^1$$

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu}F^{1\mu} = 4\pi J^1 \qquad (F^{11}=0)$$

etc.

まとめると

$$\partial_\mu F^{\alpha\mu} = 4\pi J^\alpha$$

$$\nabla \times \mathbb{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{B} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}E^z - \frac{\partial}{\partial z}E^y + \frac{\partial}{\partial t}B^x = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^2}F_{30} + \frac{\partial}{\partial x^3}F_{02} + \frac{\partial}{\partial x^0}F_{23} = 0$$

$$\longrightarrow \quad \partial_{[0}F_{23]} = 0 \qquad \text{etc.}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$$

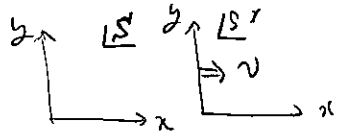
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^1}B^1 + \frac{\partial}{\partial x^2}B^2 + \frac{\partial}{\partial x^3}B^3 = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^1}F_{23} + \frac{\partial}{\partial x^2}F_{31} + \frac{\partial}{\partial x^3}F_{12} = 0$$

$$\longrightarrow \quad \partial_{[1}F_{23]} = 0 \qquad \text{etc.}$$

まとめると

$$\boxed{\partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]} = 0} \qquad \left(\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \right)$$

● 電磁場のLorentz変換



S'系がS系のx方向に速さvで運動するとき

$$\underline{F^{\mu'\nu'} = L^{\mu'}{}_{\alpha} L^{\nu'}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}}, \quad \text{と} \ \underline{\text{「1-14」の} \ L^{\mu'}{}_{\alpha}}$$

$$L^{\mu'}{}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \Gamma & -v\Gamma & 0 & 0 \\ -v\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

※ $F^{00} = 0$
$F^{11} = 0$

$$\underbrace{F^{0'1'}}_{E^{x'}} = L^{0'}{}_{\alpha} L^{1'}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} = L^{0'}{}_{0} L^{1'}{}_{1} F^{01} + L^{0'}{}_{1} L^{1'}{}_{0} F^{10}$$

$$= \Gamma^2 F^{01} + v^2 \Gamma^2 F^{10} = \underline{(1-v^2)}\Gamma^2 F^{01}$$

$$= \underbrace{F^{01}}_{\to E^x} \qquad \therefore E^{x'} = E^x$$

$$\underbrace{F^{0'2'}}_{E^{y'}} = L^{0'}{}_{0} L^{2'}{}_{2} F^{02} + L^{0'}{}_{1} L^{2'}{}_{2} F^{12}$$

$$= \Gamma F^{02} - v\Gamma \cdot F^{12}$$

$$= \Gamma(E^y - vB^z) \qquad \therefore E^{y'} = \Gamma \cdot (E^y - vB^z)$$

$$F^{0'3'} = L^{0'}{}_{0} L^{3'}{}_{3} F^{03} + L^{0'}{}_{1} L^{3'}{}_{3} F^{13}$$

$$= \Gamma \cdot F^{03} - v\Gamma F^{13}$$

$$\therefore \quad E^{z'} = \Gamma (E^{z} + v E^{y})$$

$\mathbb{E}$の変換をまとめると、

$$\begin{cases} \mathbb{E}'_{/\!/} = \mathbb{E}_{/\!/} & (\text{「}/\!/\text{」は「系の運動方向}\vec{v}\text{と平行」を意味}) \\ \mathbb{E}'_{\perp} = \Gamma \cdot (\mathbb{E}_{\perp} + \mathbb{v} \times \mathbb{B}) & ; \ \Gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \end{cases}$$

同様に $\mathbb{B}'_{/\!/} = \mathbb{B}_{/\!/}$, $\mathbb{B}'_{\perp} = \Gamma (\mathbb{B}_{\perp} - \mathbb{v} \times \mathbb{E})$ となる。

- 不変量

$F^{\mu\nu}$ から2つのLorentz不変なスカラー量が作れる

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 (\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} - \mathbb{B} \cdot \mathbb{B})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = 4 \mathbb{E} \cdot \mathbb{B}$$

Levi-Civita　　3次元Euclid内積

- 電磁ポテンシャル

古典電磁気学は(3次元)スカラーポテンシャルϕと(3次元)ベクトルポテンシャルA^i ($i=1\sim3$)を用いて記述できる。

$$\mathbb{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A} \quad , \quad \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$$

対応する4次元表示は？

$\Rightarrow$ 4元電磁ポテンシャル

$$A^{\mu} = (\phi, \mathbb{A}) \quad ; \quad A_{\mu} = (-\phi, \mathbb{A}) \qquad (A_0 = \eta_{0\nu} A^{\nu} = -A^0)$$

⊖符号に注意

すると、$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$

ex. $E^x = F_{10} = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 = -\partial_x \phi - \partial_t A^x$

$B^x = F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \partial_y A^z - \partial_z A^y$

※ A^{μ} の Lorentz 変換　$A^{\mu'} = L^{\mu'}{}_{\alpha} A^{\alpha}$

- Lorentz 力

電荷 q に働く Lorentz 力の 3 次元表現

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = q(\mathbb{E} + \mathbb{v} \times \mathbb{B})$$

を 4 次元で Lorentz 不変性が明らかな形にしたい。

※ 左辺は $\frac{dp^\mu}{d\tau}$ になるべき ∵ $p^\mu = (E, \mathbb{P})$

τ = 固有時

空間成分

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\cdot\frac{dp^i}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot q(\mathbb{E} + \mathbb{v} \times \mathbb{B})$$

$$= q(u^0\mathbb{E} + \mathbb{u} \times \mathbb{B})$$

$u^\mu = (u^0, \mathbb{u})$ ∵ 電荷の 4 元速度

時間成分

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\cdot\underbrace{\frac{dE}{dt}}_{\text{電場の仕事率}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\underbrace{q\mathbb{E}\cdot\mathbb{v}} = q\mathbb{E}\cdot\mathbb{u}$$

$$\therefore \frac{dp^\mu}{d\tau} = (q\mathbb{E}\cdot\mathbb{u},\ q(u^0\mathbb{E} + \mathbb{u}\times\mathbb{B}))$$

$$= \underline{\underline{qF^\mu{}_\nu u^\nu}}$$

(第 0 成分) $qF^0{}_\nu u^\nu = \sum_{i=1}^{3} qE^i u^i = q\mathbb{E}\cdot\mathbb{u}$

(第 1 成分) $qF^1{}_\nu u^\nu = qE^x u^0 + qB^z u^y - qB^y u^z$

$= q(u^0 E^x + (\mathbb{u}\times\mathbb{B})^x)$

1-20 古典場の Lagrange 形式

cf. 粒子の力学の Lagrange 形式

q^i : 粒子の一般化座標

$\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$: 速度

$$L = L(q^i, \dot{q}^i) \qquad \text{Lagrangian}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(q^i, \dot{q}^i) \qquad \text{作用 (action)}$$

変分原理 ⇒ Euler-Lagrange 方程式 (Newton の運動方程式と等価)

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

ex. $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2$: 質量 m, バネ定数 k の調和振動子

電磁場のような場を変数とする場合の共変的理論は?

$\phi(t, x^i)$

時空の座標は一般化座標ではない

場の量が一般化座標であると考える.

▶ 場の変数 $\phi(t, x^i)$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \iff L = L(q, \dot{q})$$

Lagrangian 密度 (空間積分すると Lagrangian となる)

時間と空間を対等に扱うため「$\dot{q}$」に相当する

作用 $S = \int_\Omega dt\, d^3x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \iff S = \int dt\, L(q, \dot{q})$

(積分を定義する時空領域)

時空間における積分.

変分 $\delta S = \int_\Omega dt\, d^3x\, \delta\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

※ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}$ は $\mathcal{L}$ の $\phi_{,\mu}$ についての偏微分

☆ $$S = \int_\Omega dt\, d^3x\, \mathcal{L}(\phi;\phi_{,\mu}) \qquad \phi_{,\mu} = \partial_\mu \phi$$

$$\delta S = \int_\Omega dt\, d^3x\, \delta\mathcal{L}(\phi;\phi_{,\mu})$$

$$= \int_\Omega dt\, d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\cdot\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\delta\phi_{,\mu} \right)$$

（δ と ∂_μ は可換なので $\delta\phi_{,\mu} = \partial_\mu \delta\phi$

$$= \int_\Omega dt\, d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\partial_\mu\delta\phi \right)$$

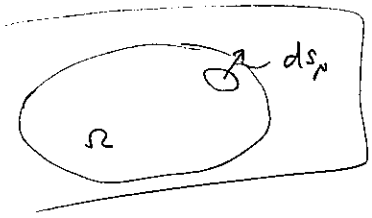
$$= \int_\Omega dt\, d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\right)\cdot\delta\phi \right)$$

ここで $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\delta\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right)}\delta\phi \equiv h^\mu$ とすると

$\frac{\mathcal{L}}{\left(\frac{\phi}{x^\mu}\right)} \sim \frac{\mathcal{L}}{\phi}x^\mu$ ← 上付き

第2項 $= \int_\Omega dt\, d^3x\, \partial_\mu h^\mu = \int_{\partial\Omega} dS_\mu h^\mu$

dS_μ : Ω の境界の法線ベクトル



$\Downarrow$ 境界で $h^\mu \to 0$ （$\delta\phi \to 0$）

$= 0$

$$\therefore\ \delta S = \int_\Omega dt\, d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\right) \right]\delta\phi$$

任意の $\delta\phi$ に対して $\delta S = 0$

$\Downarrow$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

- スカラー場 ϕ

ポテンシャル $V(\phi)$ とすると

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$$

$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ → mass term of K-G eq

$$\longrightarrow \quad \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad \text{or} \quad \Box\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0$$

- 電磁場

一般化座標 ⇒ A^μ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 4\pi A_\mu J^\mu$$

$$\longrightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu$$

※ $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial F_{\kappa\lambda}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \delta^\mu{}_\kappa\delta_\lambda{}^\nu - \delta_\kappa{}^\nu\delta_\lambda{}^\mu$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \eta^{\alpha\kappa}\eta^{\beta\lambda}\left[(\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\nu\delta_\beta^\mu)F_{\kappa\lambda} + (\delta_\kappa^\mu\delta_\lambda^\nu - \delta_\kappa^\nu\delta_\lambda^\mu)F_{\alpha\beta}\right]$$

$$= 4F^{\mu\nu}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$$

また $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 4\pi J^\nu$

よって Euler-Lagrange eq. ⇒ $\partial_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu$

※ Maxwell 方程式のもう一つの組

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]} = 0$$

は $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と A_μ を使って表現することで自動的に満たされる。

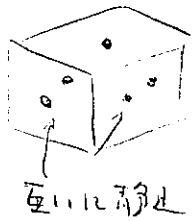
1-2) エネルギー運動量テンソル
(energy-momentum tensor / stress-energy tensor)

cf. 質点のエネルギー ε と運動量 $\mathbb{P}$ $\longrightarrow$ $p^\mu = (\varepsilon, \mathbb{P})$
電荷 ρ_e と電流密度 $\mathbb{j}$ $\longrightarrow$ $j^\mu = (\rho_e, \mathbb{j})$
電場 $\mathbb{E}$ と磁場 $\mathbb{B}$ $\longrightarrow$ $F^{\mu\nu}$

⇒ 3次元のいくつかの量をまとめて 4次元のテンソルを構成

◎ 「エネルギー」「運動の量」「力」を統合したい
$\longrightarrow$ エネルギー運動量テンソル

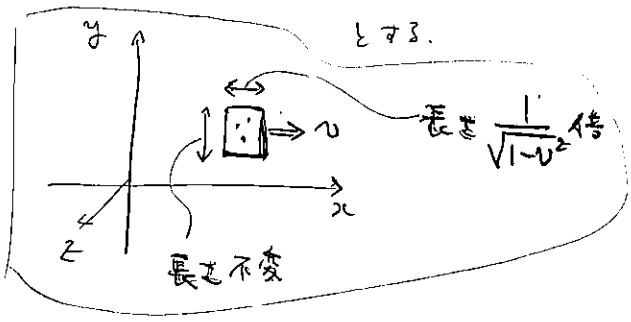
(A) ダスト



ある慣性系 S' で相互作用しない粒子が静止している系 ⇒ ダスト (dust)

S' 系で単位体積あたり n 個の粒子があるとする。

他の慣性系 S から見て S' が x 方向に v の速さで運動しているとする。



Lorentz 収縮により、S の観測する粒子密度は $\dfrac{n}{\sqrt{1-v^2}}$

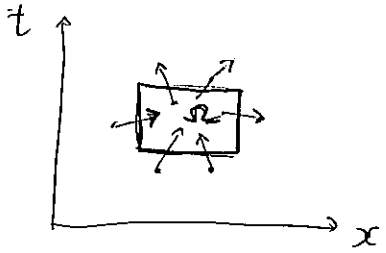
また、x 方向に垂直な (yz 平面内) を単位時間に単位面積を通過する粒子数 (流束, flux)

$$\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}v$$

これらはある4元ベクトルの成分と見なせる (いまの場合 y, z 成分は 0)

粒子の流束ベクトル
$$n^\mu \equiv \left(\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{n}{\sqrt{1-v^2}}v^i\right) \qquad (v^2 = v_i v^i)$$
$$= n u^\mu \quad ; \; u^\mu : \text{ダストの静止系の4元速度}$$
$$\left(\begin{array}{l} S'\text{系では} \\ n^\mu = (n, \mathbb{0}) \end{array}\right)$$

- 流束ベクトルの保存



4次元のある領域Ωを出入りする粒子の流束の表面積分

$$\oint_{\partial\Omega} dS_\mu n^\mu = \int_\Omega d^4x \cdot \partial_\mu n^\mu$$

粒子の生成消滅はない

⇒ Ωへの出入りの総数をカウントすると 0

$$\therefore \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu n^\mu = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\partial_\mu n^\mu = 0}$$

- 質量密度の保存

ダスト粒子一個の質量を一定(m)とすると mn^μ が<u>質量密度の流束</u>ベクトルとなる。明らかに

$$m\partial_\mu n^\mu = \underline{\partial_\mu (mn^\mu) = 0}$$

■ エネルギー密度 ε

S系で: $\varepsilon = \dfrac{m}{\sqrt{1-v^2}} \times \dfrac{n}{\sqrt{1-v^2}}$

S系での粒子のエネルギー　　S系での粒子密度

$$= \frac{mn}{1-v^2}$$

これは $mn\cdot(u^0)^2$ と書ける

■ エネルギー運動量テンソル

$mn \equiv \rho$ (ダストの静止系での質量密度)

$\underline{T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu}$ を定義すると、ε はその(00)成分となっている。

※ その形から、$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ となることが分かる

- $T^{\mu\nu}$ の意味 (S系で見てみる)

▷ T^{0i} $(i=1\sim3)$

$$T^{0i} = \rho u^0 u^i = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}} \times \frac{v^i}{\sqrt{1-v^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{体積の Lorentz 因子}} \cdot \underbrace{\frac{\rho v^i}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{S系で単位体積に入っている粒子群の運動量}}$$

(S系から見た)

⇒ 運動量密度 (i方向の成分)

あるいは見方を変えると

$$T^{0i} = \rho u^0 u^i = \underbrace{\frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{エネルギー密度}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{体積の Lorentz 因子}} \cdot \underbrace{v^i}_{i\text{方向への速度}}$$

⇒ エネルギー密度の流束 (i方向)

▷ T^{ij} $(i,j=1\sim3)$

$$T^{ij} = \rho u^i u^j = \underbrace{\frac{\rho v^i}{\sqrt{1-v^2}}}_{i\text{方向の運動量密度}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{体積の Lorentz 因子}} \cdot \underbrace{v^j}_{j\text{方向への速度}}$$

⇒ i方向の運動量密度のj方向への輸送率

or j方向に垂直な面を通してi方向に働く力

(応力)

※ jとiを入れ換えた解釈も等価

▷ T^{00}

エネルギー密度

まとめると

$$T^{\mu\nu} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon & p^1 & p^2 & p^3 \\ p^1 & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ p^2 & \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ p^3 & \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

ε : エネルギー密度

p^i : 運動量密度 または エネルギー密度の流束

σ^{ij} : 応力

このように、物質場のエネルギー・運動量密度、応力を成分として
まとめた物理量を エネルギー運動量（ストレス・エネルギー）テンソル という

※ 2階対称である

(B) 完全流体 （粘性，熱の散逸が無い）

S′系で 応力は垂直応力（圧力）のみ

$$\sigma^{ij} = p\,\delta^{ij} \qquad p : 圧力$$

エネルギー密度を ε として

(S′系) $T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \varepsilon & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{bmatrix}$

→ S系では $T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}$

(C) 電磁場

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^\mu{}_\lambda F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

◎ 保存則

・ダスト $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ $\rho = m \cdot n$)

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu(\rho u^\mu u^\nu) = \rho u^\nu \partial_\nu u^\mu + u^\mu \partial_\nu(\rho u^\nu)$$

第2項は粒子数保存 $\partial_\nu(\rho u^\nu) = 0$ から 0

第1項は $u^\nu \partial_\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{d}{d\tau}$ より

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \rho \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2}$$

外力が働かない場合 $\frac{d^2}{d\tau^2}x^\nu = 0$ (粒子の4元加速度 = 0)

$$\therefore \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

・同様に、完全流体が単体である場合(外力なし)、電磁場あるいがある場合なども $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ が成立

$\boxed{\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \text{ の意味}}$

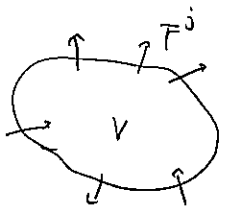
$\mu = 0$ $$0 = \partial_\nu T^{0\nu} = \frac{\partial}{\partial t}T^{00} + \frac{\partial}{\partial x^1}T^{01} + \frac{\partial}{\partial x^2}T^{02} + \frac{\partial}{\partial x^3}T^{03}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[\underset{\varepsilon}{\text{エネルギー密度}}] + \mathrm{div}[\underset{\mathbb{F}}{\text{エネルギー流束}}]$$

⟶ エネルギー保存則

$$0 = \int d^3x \cdot \partial_\nu T^{0\nu} = \int d^3x \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon + \int d^3x \cdot \nabla \cdot \mathbb{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_V \varepsilon\, d^3x = -\oint_{\partial V} dS_j \cdot F^j$$



$\mu = i$ ⟶ 運動量保存則

注

(i) エネルギー運動量テンソルのもう少しきちんとした定義は

▷ Lagrangian密度 $\mathcal{L}$ によって

$$T^{\mu}{}_{\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \cdot \phi_{,\nu} - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}$$

とする方法（正準エネルギー運動量テンソル）

cf. ハミルトニアン
$H = p \cdot \dot{q} - L$
$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$

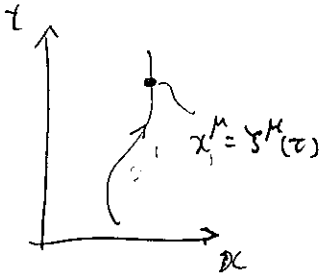
▷ 重力場と物質場を含んだ作用積分

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}_G$$

の重力場変数についての変分

による定義がある。Einsteinの一般相対論は後者に基づく定義がとられる。

(ii) 単一粒子も、Diracのδ関数を使って時空間の場として扱うことで $T^{\mu\nu}$ を定義できる。



$$T^{\mu\nu}(x^\mu) = m \int \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \cdot \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \delta^4(x^\mu - \xi^\mu(\tau)) \, d\tau$$

$\xi^\mu(\tau)$: 粒子（固有時τ）の軌跡

$\delta^4(x^\mu - \xi^\mu) \equiv \delta(t - \xi^0) \cdot \delta^3(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$

1-22 粒子の運動の作用積分

○ 自由粒子の方程式を導く作用

cf. Newton力学

$$\underset{\text{作用}}{I} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}) \xrightarrow{d} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Euler-Lagrange eq.

$$L = \underset{\text{kineticエネルギー}}{T} - \underset{\text{potential}}{U}$$

特に自由粒子のとき $L = T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$ $\left(\dot{q} = \frac{dq}{dt}\right)$

相対論的運動をする粒子の作用は？

- 慣性系 $S(t, x)$ で見たとき

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

の形で、L は速度 $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ の2次の項を含む

- I はスカラー量 (Lorentz不変)

という条件で最も簡単なもの

$$L = -m\sqrt{1-v^2} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

∵ 粒子の固有時で

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2(1-v^2)$$

$$\longrightarrow \quad d\tau = \sqrt{1-v^2}\, dt$$

$$I = \int -m\sqrt{1-v^2}\, dt = -\int m\, d\tau \quad (\text{スカラー！})$$

非相対論極限 ($|v| \ll 1$) で

$$L = -m(1-v^2)^{\frac{1}{2}} \simeq \underline{-m} + \underline{\underline{\frac{m}{2}v^2}}$$

(定数なので変分すると0)

このとき

$$\delta I = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}\right) = 0$$

↑
運動量

○ 電磁場中の荷電粒子の作用

電荷 e をもつ粒子が電磁場中を運動

→ 自由粒子の作用に<u>ポテンシャル項</u>を加える

↓

電磁場ではベクトルポテンシャル A_μ

作用がスカラーであることも必要　（A_μ からスカラーを作る必要）

$$I = \int -m\,d\tau - eA_\mu dx^\mu$$

$$= \int -(m + eA_\mu u^\mu)\,d\tau \qquad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4\text{-velocity})$$

を採用．

$$I = \int \underbrace{-\left(m\sqrt{1-v^2} - e\overset{\text{静電ポテンシャル}}{\phi} + eA_i \cdot \frac{dx^i}{dt}\right)}_{L} dt \qquad \left(\begin{array}{l} A^\mu = (\phi, \mathbb{A}) \\ \Rightarrow A_\mu = (-\phi, \mathbb{A}) \end{array}\right)$$

これを変分すると

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = e(\mathbb{E} + \mathbb{v} \times \mathbb{B})$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} - \nabla\phi \\ \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} \end{array}\right.$$

また 正準運動量 $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \mathbb{p} + e\mathbb{A} \qquad \mathbb{p} = \frac{m\mathbb{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$