§2 一般相対論の導入

2-1 等価原理 (equivalence principle)

(2-1-1) 弱い等価原理 (Weak Equivalence Principle)

・物体に働くNewton重力

$$-m_g \cdot \nabla \Phi$$

m_g: 物体の重力質量　Φ: potential.

・物体の慣性 (慣性質量 m_i)

$$m_i \cdot a$$

a: 加速度

運動方程式

$$m_i a = -m_g \nabla \Phi$$

$m_i = m_g$ は自明でない

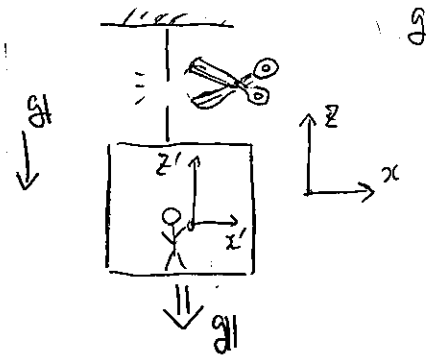
(cf. 静電力 $m_i a = -e \nabla \Phi_E$ 　Φ_E: 静電ポテンシャル)

▷ WEP: $m_i = m_g$ を要請.

$$\longrightarrow a = -\nabla \Phi$$

この原理の下では物体に働く重力の効果はその質量や組成によらない

$\longrightarrow$ 上の加速度を打ち消す運動をする観測者には重力は消えてしまったように見える.



$g = |\nabla \Phi|$ とする.

・箱の外の観測者 (x, z)

$$m \ddot{z} = -mg$$

$$\longrightarrow \ddot{z} = -g$$

・箱の中の観測者 (x', z')

$$z' = z + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\longrightarrow \ddot{z}' = \ddot{z} + g$$

$$\Rightarrow \ddot{z}' = 0 \quad (\text{重力加速度は消える})$$

※ この原理は Eötvös の実験等で検証

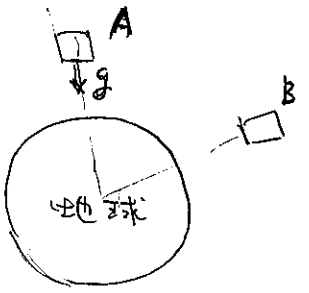
(2-1-2) Einstein の等価原理 (EEP)

WEP : 重力 & 慣性質量の等価性

→ 重力が消えて見える観測者(加速運動する)が存在.

- 適当な加速系では みかけの重力が出現 (慣性力)
- 「重力が消えて見える」→ 物理現象は記述するのに特殊相対論を使える

- ただし、重力を消せる観測者の存在領域は時間、空間的に限定される



Aの位置での自由落下運動は
Bでの重力を消せない

また、自由落下運動は時間的にも限られる.

Einstein の等価原理 (Einstein's Equivalence Principle)

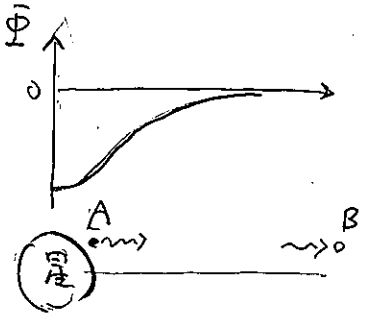
時間、空間の局所的領域では重力を打ち消すことができます.
そこでは特殊相対論によって物理が記述される.

EEP によれば、加速運動と重力を局所的(local)に区別できない.

(2-1-3) 重力赤方偏移 (gravitational red shift)

EEP ⇒ 重力の強い(重力ポテンシャルの深い)所から来る光は赤方偏移する.

⇒ 重力の強さによって時間の進み方が変わる

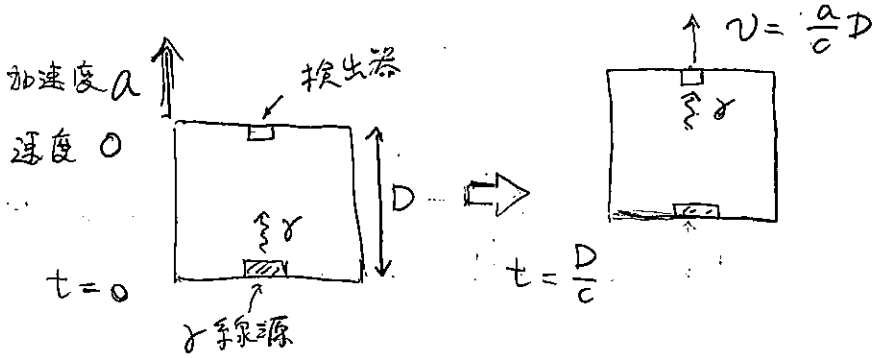


Aで波長 λ_A の光が
Bで波長 λ_B

$\lambda_A < \lambda_B$

(振動数 $\nu_A > \nu_B$)

一様加速運動する箱



γ線発射時の振動数 ν_0

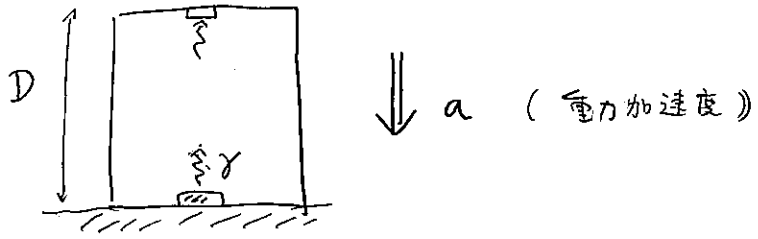
〃 検出 〃 ν_1 （検出器は $v=\frac{a}{c}D$ で遠ざかる）

$$\nu_1 = \nu_0 \times \left(1-\frac{v}{c}\right) = \nu_0\left(1-\frac{a}{c^2}D\right) \quad \text{—(1)}$$

(Doppler 効果)

EEP から上の実験は以下と等価

cf. Pound & Rebka (1960)

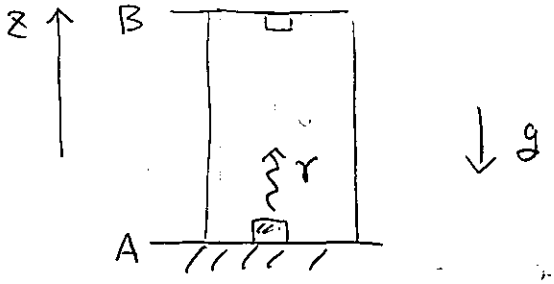


γ線源での重力ポテンシャル Φ_0
検出器 Φ_1 とすると

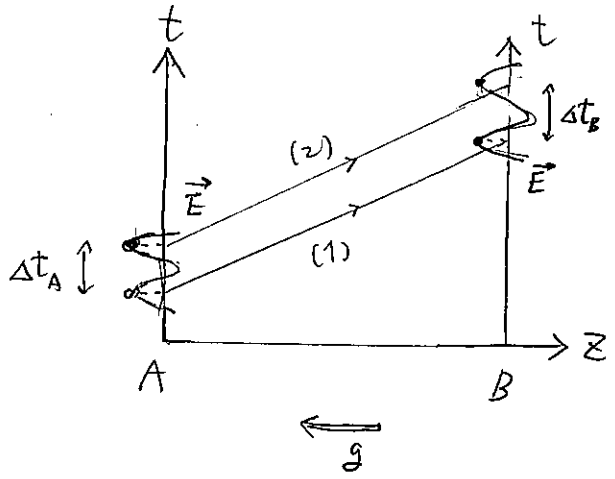
$$\longrightarrow \quad a = \frac{\Phi_1-\Phi_0}{D}$$

(1) より $\nu_1 = \nu_0\cdot\left(1-\frac{\Phi_1-\Phi_0}{c^2}\right) < \nu_0$ （$\Phi_1>\Phi_0$ のとき）

これはまた、重力ポテンシャルが Φ_0 にある点での時間の進み方が Φ_1 での時間の進み方より遅いことを示す。



静的（時間変化しない）一様重力場



A にある振動子から発する光（振動数 ν_A）
電場 E の「山」と「山」の時間間隔 Δt_A

$$\Delta t_A = \frac{1}{\nu_A}$$

B にある検出器での電場の「山」と「山」の間隔は？

⇓

光の進路は (1) と (2) は図上で平行移動すれば重なるはず

⇓

$$\Delta t_B = \frac{1}{\nu_A} \quad ?$$

ところが、実際は $\Delta t_B = \frac{1}{\nu_B}$ （B での振動数）

$$\Delta t_B = \frac{1}{\nu_B} > \frac{1}{\nu_A} = \Delta t_A$$

結論 ① 振動子 A は B から見るとゆっくり振動しているように見える
⇔ A での時間の進み方は B での進み方より遅い

② A, B に静止した時計は同期できない
⟶ Minkowski 時空では記述できない
一般に重力場中で大局的な慣性系はとれない ⇔ Minkowski 時空ではない

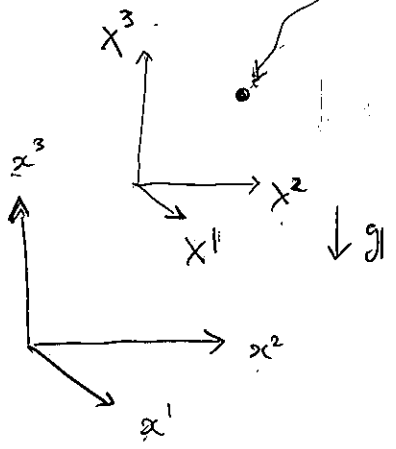
⇕

自由落下系は局所的に Minkowski と同一 (EEP)

◎ Minkowski 時空（3次元 Euclid 空間を4次元化した「平坦な」時空）を局所近似として持つような曲がった時空の理論が必要
（擬）Riemann 幾何学

(2-1-4) 質点の運動方程式

重力以外の力の働かない質点



X^μ : 重力場内で自由落下する座標系 : S_F

x^μ : 一般の座標系 (ex. 地球に固定された系) : S_G

質点の"位置"座標 X^μ or x^μ

$$X^\mu = X^\mu(\vec{x}) \qquad \vec{x} = x^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$$

仮定 (自由落下系では質点に力が働いていない (自由粒子)
EEP

S_Gでの質点の運動 → 等速直線運動

$$\frac{d^2}{d\tau^2}X^\mu = 0$$

(τ: 質点の固有時
$d\tau^2 (= -ds^2) = -\eta_{\mu\lambda}\, dX^\mu dX^\lambda$
Minkowski 計量)

$$\frac{d}{d\tau}X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right] = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\right)\cdot\frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

$$= \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{dx^\beta}{d\tau}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\right]\cdot\frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

$$\Big\downarrow \times \frac{\partial x^\gamma}{\partial X^\mu} \qquad \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial X^\mu}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta^\gamma_\alpha \text{ に注意}\right)$$

$$0 = \frac{d^2}{d\tau^2}x^\gamma + \underbrace{\frac{\partial x^\gamma}{\partial X^\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\right]}_{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}\cdot\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

これがS_Fで見た、
同じ粒子の運動方程式

※ $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$
∵ $\partial_\beta(\partial_\alpha X^\mu) = \partial_\alpha(\partial_\beta X^\mu)$ より

一方、世界間隔 interval ds^2 は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$$= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta$$

$$= \underbrace{\eta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta}\right)}_{\equiv\, g_{\alpha\beta}} dx^\alpha dx^\beta \qquad (※\ g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha})$$

まとめると、重力だけが働く質点の運動 $x^\gamma = x^\gamma(\tau)$ を、一般の（角度を入れていない）座標系で記述する式は

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

また、この座標での interval は

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

(2-1-5) 擬 Riemann 空間 (pseudo-Riemannian space)

重力があっても、事象の記述には Minkowski 時空と同様に4つの座標（時間"1"&空間"3"）が必要。(ex. (t, x, y, z))

（座標：4つの実数（事象の関数）

$(事象) \longrightarrow \mathbb{R}^4$

このような連続写像の存在する集合を多様体 (manifold) という）

事象 $A(x^\mu)$ と $B(x^\mu + dx^\mu)$ 間の interval が

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

という2次形式で定義される空間

ds^2 が正定値である ⇒ Riemann 空間 ← ex. 3次元 Euclid 空間

〃 でない ⇒ 擬 Riemann 空間 ← 時空

自由落下系 $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ $\qquad \eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ $\qquad (g_{\alpha\beta} \neq \eta_{\alpha\beta})$

逆に: $g_{\alpha\beta}$ が interval を定義する量として最初から与えられている空間を考える

自由落下系 $\longleftrightarrow$ $\eta_{\alpha\beta}$ $\longleftrightarrow$ 重力なし

一般の系 $\longleftrightarrow$ $g_{\alpha\beta}$ $\longleftrightarrow$ 重力が顕在

$\rightarrow$ $g_{\alpha\beta}$ に重力の情報が含まれるだろう.

2-2 一般相対性原理

一般相対論を展開するためのもう一つの原理

「物理法則(重力も含む)は一般座標変換に対して式の形を変えない.」

$\Downarrow$

Q: この要請を満たす量は何か?

また, この量を用いて物理法則はどう表わされるべきか

A: 特殊相対論におけるテンソル(スカラー, ベクトルを含む)を拡張する.

テンソルの間の関係式

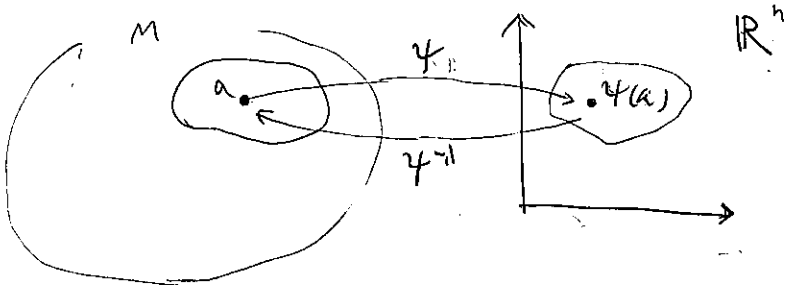
(ある階数のテンソル) = (左辺と同じ階数のテンソル)

≫ 多様体

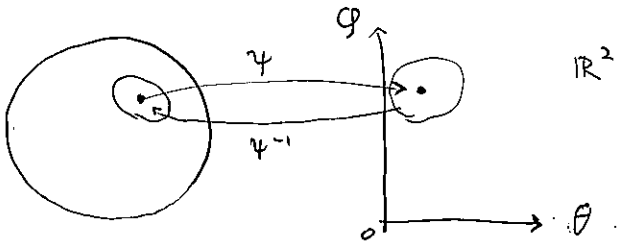
"それに含まれる要素すべてが実数によって連続パラメータ付けられているような集合"

↓

集合 M の任意の要素 $a \in M$ を含む開部分集合から $\mathbb{R}^n$（nは或る自然数）の開部分集合への連続1対1写像が存在する



ex.



2次元球面 S^2

$n=2$（2次元）

ex. 一般線型群 $GL(n, \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \det A \neq 0 \\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{array} \right. \longrightarrow A \in GL(2, \mathbb{R})$$

$$GL(n, \mathbb{R}) \underset{\psi^{-1}}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^{n^2}$$

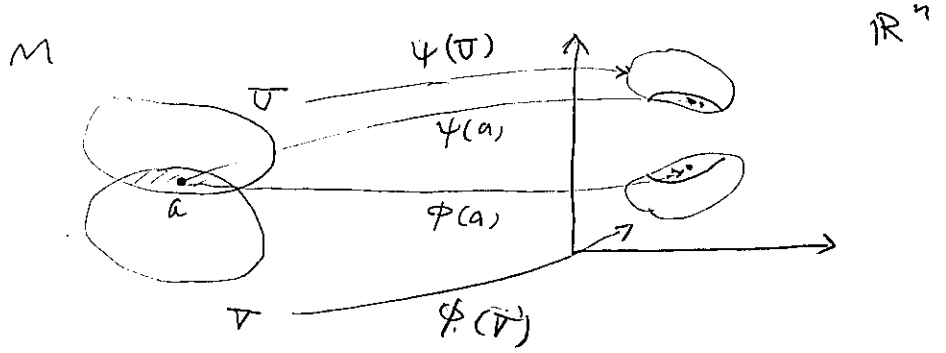
n^2次元の多様体

多様体の開集合 $\rightleftarrows$ $\mathbb{R}^n$の開集合
の写像とその定義域の組
$\Downarrow$
chart（「地図」の意）
$\Rightarrow$ 多様体の点の座標を与える.

多様体全体を1つのchartで覆うことは一般にできない

(ex.) 地球の表面の点 $\longleftrightarrow$ 2次元平面
Mercator図法 $\Rightarrow$ 必ずsingularな点がある.

一般にはchartを複数用意して多様体全体を覆うことを考える.



"chartの重なりでうまく辻褄が合うようにしたい"

$\psi(a) = (x^1, x^2, \cdots x^n) \in \mathbb{R}^n$

$\phi(a) = (y^1, y^2, \cdots y^n) \in \mathbb{R}^n$ のとき

$(y^1, y^2, \cdots y^n) = \phi \circ \psi^{-1}(x^1, x^2, \cdots x^n)$ となる.

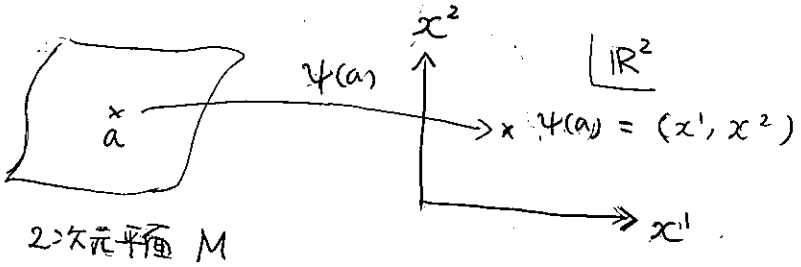
この $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ の関数 $\phi \circ \psi^{-1}$ が
C^1級（連続1回微分可能）のとき
Mを可微分多様体（differentiable manifold）という.

2-3 多様体上のテンソル解析

時空の数学的モデルとして多様体を導入するとき
物理量やそれらの間の方程式をどう表すか?
⇒ スカラー, ベクトル, テンソル 及び それらの微分

以下では主に、2次元平面を多様体の例として考え、そこでのテンソル量を調べる
(Schutz 2009)

(2-3-1) 1-form (一形式)



M上の点 a の座標 $\psi(a)$ ⇒ ψ は a に 2つの実数の組 (x^1, x^2) を対応させる写像

(ex. $x^1 = x$, $x^2 = y$: Cartesian
$x^1 = r$, $x^2 = \varphi$: 極座標)

M上の関数 f ; $a \in M$ に 実数 $f(a)$ を対応 (M上のスカラー場)

○ f の gradient (勾配) df の定義 (cf Minkowski 時空のスカラー場 $\phi(t,x,y,z)$ → $d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$)

ψ で決まる座標系 (x^1, x^2) に対して

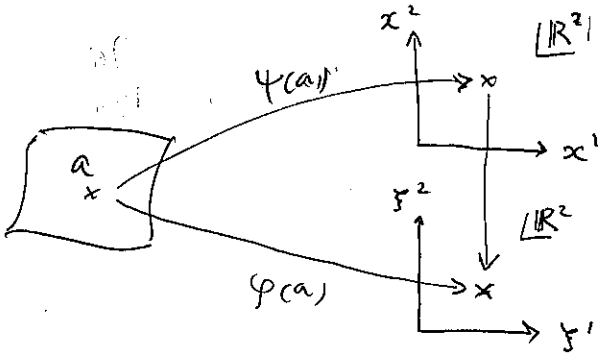
$$df \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}\right)\Big|_{\psi} \quad ①$$

という実数の組で表現される object.

別の座標系 $a \longrightarrow \varphi(a) = (\xi^1, \xi^2)$ での表現は

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi^1}, \frac{\partial f}{\partial \xi^2}\right)\Big|_{\varphi} \quad ②$$

① と ② の整合性



$\varphi\circ\psi^{-1}$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ の 2変数関数で微分可能

$(x^1, x^2) \to (\xi^1, \xi^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial \xi^2}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi^1}, \frac{\partial f}{\partial \xi^2}\right)\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}}_{\varphi\circ\psi^{-1}\text{で決まる変換行列}}$$

と変換すればよい。

$$(x^1, x^2) = x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2), \qquad (\xi^1, \xi^2) = \xi^{\bar\mu} \quad (\bar\mu = 1, 2)$$

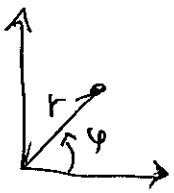
$$\boxed{(df)_\alpha = (df)_{\bar\mu}\,\Lambda^{\bar\mu}{}_\alpha \quad ; \quad \Lambda^{\bar\mu}{}_\alpha = \frac{\partial \xi^{\bar\mu}}{\partial x^\alpha}}$$

ex.) (x, y) と (r, φ) $\quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Cartesian $\qquad$ 極座標

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

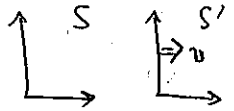
df: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$



$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot r\cos\varphi \end{cases}$$

ex.) Minkowski 時空での勾配 $d\phi$ の Lorentz 変換

S 系 $(x^\alpha) \longrightarrow$ S' 系 $(x^{\mu'})$



$$x^{\mu'} = L^{\mu'}{}_{\alpha}\, x^\alpha \qquad L^{\mu'}{}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \Gamma & -v\Gamma & 0 & 0 \\ -v\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \underbrace{L^{\alpha}{}_{\mu'}}_{(L^{-1})^{\alpha}{}_{\mu'} \text{ の意味}} dx^{\mu'} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu'}} \cdot dx^{\mu'}$$

$L^{\alpha}{}_{\mu'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}$ と書けない成分の関係は

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}$$

☆ 座標基底一形式 (coordinate basis 1-form)

$a \in M$ に対して <u>座標値 x^α $(\alpha = 1, 2)$ を与えるスカラー関数</u>

の gradient は <u>dx^α</u> と書ける

定義より $dx^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^1}, \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^2}\right) = (\delta^\alpha{}_1, \delta^\alpha{}_2)$

つまり $dx^1 = (1, 0)$, $dx^2 = (0, 1)$

<u>dx^α</u> を 座標 x^α の <u>座標基底一形式</u> と呼ぶ。

ex. $$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right) = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}}_{\text{展開係数}} \underbrace{dx^\alpha}_{\text{基底}}$$

◎ $a \in M$ での一形式は座標変換において gradient と同じ変換をするような object の集合をなす。

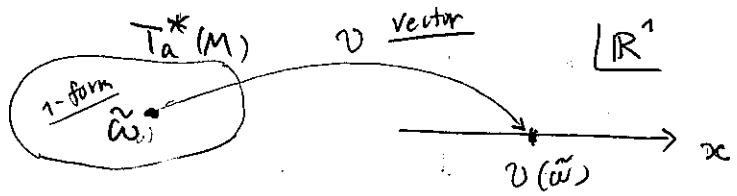
↳ <u>ベクトル空間</u> (M の a での余接空間 (cotangent space))

$T^*_a(M)$

$$\tilde{\omega} \in T^*_a(M) \longrightarrow \tilde{\omega} = \underbrace{\omega_\alpha}_{\text{成分}} \overbrace{dx^\alpha}^{\text{基底}}$$

(2-3-2) ベクトル

$a \in M$ での ベクトル（接ベクトル）は 1-form の線型関数として定義できる （cf. 双対空間）



$$\tilde{\omega} \in T_a^*(M) \longmapsto v(\omega) \in \mathbb{R}^1$$

$$\tilde{\omega}, \tilde{\lambda} \in T_a^*(M), \quad A, B \in \mathbb{R}$$
$$\longrightarrow \quad v(A\tilde{\omega} + B\tilde{\lambda}) = A \cdot v(\tilde{\omega}) + B \cdot v(\tilde{\lambda}) \in \mathbb{R}$$

v の集合自体も ベクトル空間 となる

$T_a(M)$ 接空間 (tangent space)

$$v, w \in T_a(M) \longrightarrow Av + Bw \in T_a(M)$$
$$A, B \in \mathbb{R}$$

$T_a(M)$ と $T_a^*(M)$ は 互いに双対 (dual)

[cf. 量子力学の ket $|\phi\rangle$
bra $\langle\psi|$
の空間はそれぞれ双対]

☆ 座標基底ベクトル (coordinate basis vector)

座標基底一形式 $dx^\alpha \in T_a^*(M)$ に対して

$e_\mu \in T_a(M)$ を $\boxed{e_\mu(dx^\alpha) = \delta_\mu^{\ \alpha}}$ となるように導入 (双対基底)

e_μ : 座標基底ベクトル

$e_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ と書く.

$v \in T_a(M)$ に対して

$$v = \underbrace{v^\mu}_{\text{係数}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)}_{\text{基底}}$$

と展開して成分(係数)を定義できる.

ex.) 2次元平面での極座標 (r, φ)

$$dr = \begin{array}{c} (1, 0) \\ r \quad \varphi \end{array}, \quad d\varphi = \begin{array}{c} (0, 1) \\ r \quad \varphi \end{array}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(dr) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial r}(d\varphi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}(dr) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}(d\varphi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} r \\ \varphi \end{array}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} r \\ \varphi \end{array}$$

ベクトル $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A^r \\ A^\varphi \end{pmatrix}$ とすると

$$\mathbb{A} = A^r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + A^\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$ と書ける.

このとき、

$$\mathbb{A}(dr) = A^r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)(dr) + A^\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)(dr) = A^r$$

$$\mathbb{A}(d\varphi) = A^r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)(d\varphi) + A^\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)(d\varphi) = A^\varphi$$

ベクトルは M 上のスカラー関数に作用する演算子でもある.

$$v = v^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \in T_a(M) \qquad (a \in M)$$

$$f : a \longmapsto f(a) \in \mathbb{R}$$

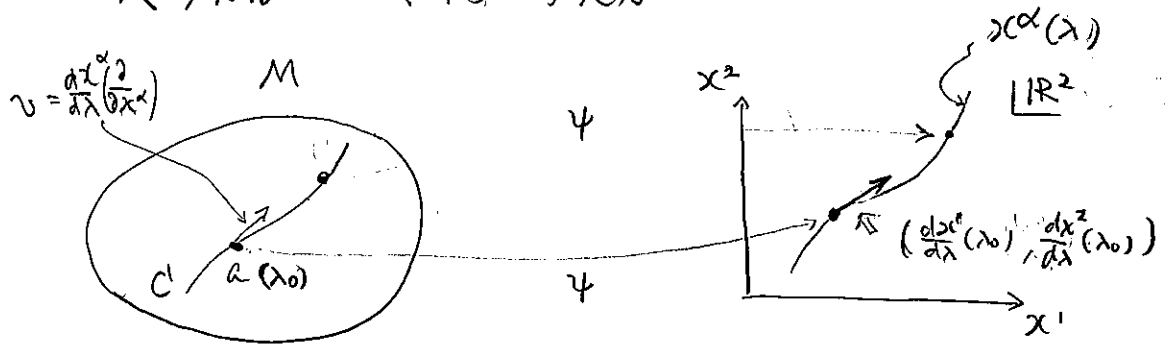
$$v[f] \equiv v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f(a) = v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \underbrace{f(a(x^1, x^2))}_{f(x^1, x^2)}$$

$$= v^1 \frac{\partial f(x^1, x^2)}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial f(x^1, x^2)}{\partial x^2} \in \mathbb{R}$$

$$\left(= v(df) = df(v) \right)$$

これは、v の f への作用が v に沿った f の方向微分となることを意味する.

◎ ベクトルの幾何学的見方



M上の曲線 C （実数パラメータ λ に M上の点を対応した一次元部分多様体）

$$C : \mathbb{R} \longrightarrow M$$

座標 $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2 \cdots\cdots\rangle (x^1, x^2)$

x^1, x^2 も λ の関数で $(x^1(\lambda), x^2(\lambda))$ は $\mathbb{R}^2$ 内で曲線を表す（C の像）.

その接ベクトルは

$$\left(\frac{dx^1}{d\lambda}, \frac{dx^2}{d\lambda}\right)$$

という成分をもつ.

これと同じ成分をもつベクトル $v \in T_a(M)$ を定義してみると

$$v \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)}_{\text{基底}}$$

∴ v は M における C の接ベクトルとなっている

◎ 座標変換によるベクトルの基底と成分の変換

u が $M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ の座標 (x^1, x^2) で

$$u = u^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$$

とする. 別の座標 (ξ^1, ξ^2) での表現は？

- 基底 $\quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \xi^{\bar\mu}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^{\bar\mu}} = \Lambda^{\bar\mu}{}_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^{\bar\mu}}$

  勾配の変換（p. 11）で出て来た行列

- 成分 : u は座標変換で変わらない

$$\longrightarrow \quad u = u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = u^\alpha \frac{\partial \xi^{\bar\mu}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^{\bar\mu}} \equiv u^{\bar\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^{\bar\mu}} \quad \therefore u^{\bar\mu} = \frac{\partial \xi^{\bar\mu}}{\partial x^\alpha} \cdot u^\alpha$$

$$= \Lambda^{\bar\mu}{}_\alpha u^\alpha$$

ex.) 2次元 Cartesian $\longleftrightarrow$ 極座標

(x, y) $\qquad$ (r, φ)

1-form 基底

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$= \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial y}{dr} dr + \frac{\partial y}{d\varphi} d\varphi$$

$$= \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

$$d\varphi = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

ベクトル基底

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$= \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$= \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

(2-3-3) テンソル

一般の多様体上のテンソルは、接空間、余接空間の元の直積空間から $\mathbb{R}$ への多重線型写像として定義できる。

ex.

$$\underset{\underset{T(M)}{\cap}}{u,\ v} \longrightarrow Q(u,v) \in \mathbb{R} \qquad Q:\ \binom{0}{2}\ \text{テンソル}$$

$$\underset{\underset{T^*(M)}{\cap}}{\tilde{\omega},\ \tilde{\lambda}} \longrightarrow S(\tilde{\omega},\tilde{\lambda}) \in \mathbb{R} \qquad S:\ \binom{2}{0}\ \text{テンソル}$$

$$\underset{\underset{T^*(M)}{\cap}}{\tilde{\omega}}\ \cdot\ \underset{\underset{T(M)}{\cap}}{u} \longrightarrow Z(\tilde{\omega},u) \in \mathbb{R} \qquad Z:\ \binom{1}{1}\ \text{テンソル}$$

テンソルの座標基底は座標基底 1-form、座標基底ベクトルから構成できる。（テンソル積「⊗」）

ex.) 2次元極座標で $\binom{0}{2}$ テンソルの基底は

$dr\otimes dr,\ dr\otimes d\varphi,\ d\varphi\otimes dr,\ d\varphi\otimes d\varphi$

任意の $\binom{0}{2}$ テンソル Q は

$$Q = Q_{11}\,dr\otimes dr + Q_{12}\,dr\otimes d\varphi + Q_{21}\,d\varphi\otimes dr + Q_{22}\,d\varphi\otimes d\varphi$$

と書ける。（$Q_{\alpha\beta}$：成分）

$u = u^1\frac{\partial}{\partial r} + u^2\frac{\partial}{\partial\varphi}$; $v = v^1\frac{\partial}{\partial r} + v^2\frac{\partial}{\partial\varphi}$ とすると

$$Q(u,v) = Q_{11}\,dr(u)\otimes dr(v) + Q_{12}\,dr(u)\otimes d\varphi(v) + \cdots$$

$$= Q_{11}\,dr\left(u^1\frac{\partial}{\partial r}+u^2\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot dr\left(v^1\frac{\partial}{\partial r}+v^2\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$+ Q_{12}\,dr\left(u^1\frac{\partial}{\partial r}+u^2\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot d\varphi\left(v^1\frac{\partial}{\partial r}+v^2\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \cdots$$

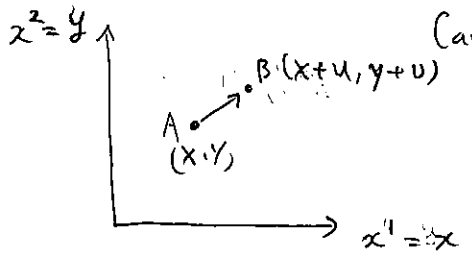
$$= Q_{11}\left\{u^1 dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+u^2 dr\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}\cdot\left\{v^1 dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+v^2 dr\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}$$
$$+ Q_{12}\left\{u^1 dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+u^2 dr\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}\cdot\left\{v^1 d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+v^2 d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\} + \cdots$$

$$= Q_{11}u^1v^1 + Q_{12}u^1v^2 + Q_{21}u^2v^1 + Q_{22}u^2v^2$$

(2-3-4) 計量テンソル

ベクトルの長さや内積を定義するには？

ex. 2次元平面



Cartesian 座標で

$A(x, y)$, $B(x+u, y+v)$

の (距離)^2 $= dl^2$

$$dl^2 = u^2 + v^2 \ (= u\cdot u + v\cdot v)$$

$\binom{0}{2}$ テンソル g を $g = g_{11}\, dx\otimes dx + g_{12}\, dx\otimes dy + g_{21}\, dy\otimes dx + g_{22}\, dy\otimes dy$

ただし $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と定義してみる.

$\overrightarrow{AB} = u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ なので

$g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = u^2 + v^2 = dl^2$ となる. $\Rightarrow$ g が (距離)^2 を定義

一方. 2つのベクトル $a = a^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + a^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $b = b^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + b^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$

に対して

$$g(a, b) = a^1\cdot b^1 + a^2\cdot b^2 = g(b, a)$$

$\Longrightarrow$ g はベクトルの内積を定義

◎ 対称 $\binom{0}{2}$ テンソル g を (2次元の) 計量テンソル (metric tensor) と呼ぶ.

g の極座標表現

$x^\alpha = (x, y)$, $\xi^{\bar\mu} = (r, \varphi)$ とする

$$g = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\otimes dx^\beta = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^{\bar\mu}} d\xi^{\bar\mu}\right)\otimes\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^{\bar\nu}} dx^{\bar\nu}\right)$$

$$= \left(g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^{\bar\mu}}\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^{\bar\nu}}\right)\cdot dx^{\bar\mu}\otimes dx^{\bar\nu}$$

$$= g_{\bar\mu\bar\nu}\, dx^{\bar\mu}\otimes dx^{\bar\nu} = dr\otimes dr + r^2 d\varphi\otimes d\varphi \qquad g \to \begin{array}{cc} r & \varphi \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{array}{c} r \\ \varphi \end{array}$$

一般の n 次元多様体上に (距離(長さ))^2 を定義する 対称 $\binom{0}{2}$ テンソル(計量)が付与されるとき、これを Riemann 多様体という。

Minkowski 時空の場合 ⇒ interval は正定値でない (interval は 0, 負になれる)

⇓

擬 Riemann 多様体 (時空 ⇒ (−1, 1, 1, 1) Lorentzian 多様体)

※ 数学的には計量 g を多様体に勝手に付与できる

⟶ 物理に登場する「時空」を多様体として扱う場合、その計量 g は勝手に決められない

⟶ Einstein 方程式を矛盾なく満たす解として g が決められる。

※ 計量 $g = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta$ に対して

$g^{\mu\nu} = [g^{-1}]^{\mu\nu}$ とする。 $\left(g^{-1}\cdot g = \mathbb{1} \quad \text{or} \quad g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda\right)$

$g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$: 対称 $\binom{2}{0}$ テンソル

これも計量と考えることができる (1形式の「長さ」、「内積」を定義)

※※ 計量を介して双対空間 (tangent ⟷ cotangent space) の元に自然な対応がつく。

$$u \in T(M) \Longrightarrow g(u, \sqcup) = (g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta)(u, \sqcup)$$

空欄

$$= g_{\alpha\beta}\, \underline{dx^\alpha(u)} \cdot dx^\beta$$

$$= \underbrace{(g_{\alpha\beta} u^\alpha)}_{\equiv\, u_\beta} dx^\beta$$

$$= u_\beta\, dx^\beta \equiv \tilde{u} \quad (u \text{ に対応する 1-form})$$

$$\tilde{\omega} \in T^*(M) \Longrightarrow g(\tilde{\omega}, \sqcup) = \left(g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\right)(\tilde{\omega}, \sqcup)$$

空欄

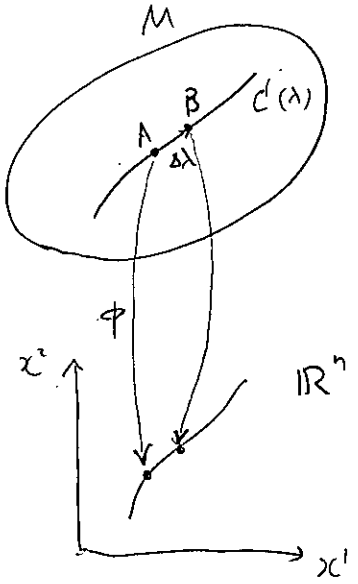
$$= g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)(\tilde{\omega})\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$$

$$= g^{\alpha\beta}\omega_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \omega^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (\tilde{\omega} \text{ に対応するベクトル})$$

(2-3-5) テンソルの微分

(A) スカラー

多様体上のスカラー量の微分



スカラー f

- 曲線 $C(\lambda)$ で方向を指定 : λ: パラメータ
- $\Delta\lambda$ だけ離れた点 A, B での値の差分

$$\frac{1}{\Delta\lambda}\left(f(B)-f(A)\right)$$

- $\Delta\lambda \to 0 \Rightarrow \dfrac{df}{d\lambda}$

- 座標 $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ を使うと

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\mu} f\circ\phi^{-1}(x^1,\cdots x^n)$$

⟹ ベクトル $\dfrac{dx^\mu}{d\lambda}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$ に沿った方向微分

$$\underbrace{\frac{dx^\mu}{d\lambda}}_{\substack{\text{微分をとる}\\ \text{方向を指定}\\ \text{するベクトル成分}}}\cdot\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^\mu}}_{\text{“}f\text{の微分”}}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}$ は df (1-形式) の成分とも見ることができる

$$\left(df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu \right)$$

つまり 微分は スカラー ($\binom{0}{0}$ テンソル) を 1-形式 ($\binom{0}{1}$ テンソル) に写す演算 (∇ と書く) と考えられる

$$\underset{\text{スカラー}}{f} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{1-形式}}{\nabla f} \equiv df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\cdot dx^\mu \equiv \underline{\underline{\nabla_\mu f}}\cdot dx^\mu$$

$\left(\begin{matrix}\text{または}\\ \partial_\mu f\end{matrix}\right)$

※ ベクトル u の方向への微分を ∇_u と書く

$$\nabla_u f \equiv u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f$$

特に $u = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = e_\alpha$ (座標基底ベクトル) のとき

$$\nabla_{e_\alpha} f = \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)} f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \equiv \nabla_\alpha f$$

(B) ベクトル

ベクトルのある方向（別のベクトルで指定）への微分を考えたい

ex) 2次元 Cartesian

$$\mathbb{V} = V^x \mathbb{e}_x + V^y \mathbb{e}_y$$

$\mathbb{V}$ の $\mathbb{e}_x$ 方向への微分は？

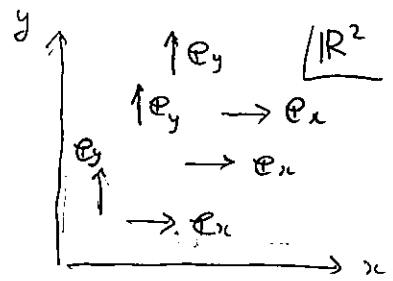
Leibnitz rule を適用してみる.

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{V} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V^x \mathbb{e}_x + V^y \mathbb{e}_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}V^x \mathbb{e}_x + V^x \cancel{\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{e}_x}^{\,0}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}V^y \mathbb{e}_y + V^y \cancel{\frac{\partial}{\partial y}\mathbb{e}_y}^{\,0}$$

$$= \frac{\partial V^x}{\partial x}\mathbb{e}_x + \frac{\partial V^y}{\partial x}\mathbb{e}_y$$

⇒ 成分の微分を係数としたベクトルとすればよ

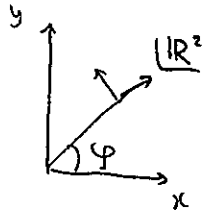


基底 $\mathbb{e}_x, \mathbb{e}_y$ は場所によらない

⇒ $\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{e}_x = \mathbb{0}$ etc.

● では、$\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbb{e}_j \neq \mathbb{0}$ のときはどうしたらよいか？

ex) 2次元 極座標



$$\frac{\partial}{\partial r} \equiv \mathbb{e}_r, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv \mathbb{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} \mathbb{e}_r = \cos\varphi \cdot \mathbb{e}_x + \sin\varphi \cdot \mathbb{e}_y \\ \mathbb{e}_\varphi = -r\sin\varphi\, \mathbb{e}_x + r\cos\varphi\, \mathbb{e}_y \end{cases}$$

← 長さ1でないことに注意

すると、

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\mathbb{e}_r = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbb{e}_r = \frac{1}{r}\mathbb{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r}\mathbb{e}_\varphi = \frac{1}{r}\mathbb{e}_\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbb{e}_\varphi = -r\mathbb{e}_r \end{cases}$$

このとき、$V = V^r \mathbb{e}_r + V^\varphi \mathbb{e}_\varphi$ に対して

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V^r}{\partial \varphi}\mathbb{e}_r + \frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi}\mathbb{e}_\varphi + \frac{V^r}{r}\mathbb{e}_\varphi - rV^\varphi \mathbb{e}_r = \left(\frac{\partial V^r}{\partial \varphi} - rV^\varphi\right)\mathbb{e}_r + \left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V^r}{r}\right)\mathbb{e}_\varphi$$

◎ 基底ベクトルの座標微分は基底ベクトルの線型結合として書ける.

$$e_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{として}$$

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\alpha} \equiv \underline{\underline{C_{\mu\alpha}^{\ \ \beta}}}\, e_\beta$$

← 接続係数 (connection coefficients)

$C_{\mu\alpha}^{\ \ \beta}$ によってベクトルの座標微分は次のように形式的に書ける.

$$V = V^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = V^\nu e_\nu$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\alpha} + V^\mu C_{\mu\alpha}^{\ \ \nu}\right) e_\nu$$

スカラーの場合と同様に $\frac{\partial V}{\partial x^\alpha}$ を"係数"とするテンソル $\underline{\underline{\nabla V}}$ を考える.

$$\nabla V \equiv \underbrace{dx^\alpha}_{\text{基底}} \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} \equiv \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\alpha} + V^\mu C_{\mu\alpha}^{\ \ \nu}\right) dx^\alpha \otimes e_\nu$$

⇒ ∇V は $\binom{1}{1}$ テンソルとなるべき

∇ を演算子として考えると

$$\underset{\binom{1}{0}}{V} \longrightarrow \underset{\binom{1}{1}}{\nabla V}$$

では、∇V がテンソルとなるためには $C_{\mu\alpha}^{\ \ \nu}$ にはどういう制限がつくか?

- 多重線型性
- 座標変換

座標変換 $x^\alpha \to y^{\bar\mu}$ に対する ∇V の変換性を調べる.

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\alpha} + V^\mu C^\nu_{\mu\alpha}\right) dx^\alpha \otimes e_\nu$$

右辺を変換してみる

$$\left[\frac{\partial y^{\bar\lambda}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial y^{\bar\lambda}}\underbrace{\left\{\frac{\partial x^\nu}{\partial y^{\bar k}}\cdot V^{\bar k}\right\}}_{\substack{\uparrow \\ (\text{ベクトル}V\text{の成分}V^\nu\text{の変換})}} + \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\bar k}}\cdot V^{\bar k}}_{\substack{\uparrow \\ V^\mu}}\cdot C^\nu_{\mu\alpha}\right]\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar\sigma}}dy^{\bar\sigma}\right)}_{\substack{\uparrow \\ dx^\alpha}}\otimes\underbrace{\left(\frac{\partial y^{\bar\omega}}{\partial x^\nu}e_{\bar\omega}\right)}_{\substack{\uparrow \\ e_\nu}}$$

$$\left(e_{\bar\omega} = \frac{\partial}{\partial y^{\bar\omega}}\right)$$

$$= \left[\delta^{\bar\lambda}_{\bar\sigma}\,\delta^{\bar\omega}_{\bar k}\cdot\frac{\partial V^{\bar k}}{\partial y^{\bar\lambda}} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar\sigma}}\cdot\frac{\partial y^{\bar\omega}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial y^{\bar\lambda}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^{\bar\lambda}\partial y^{\bar k}} + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\bar k}}\cdot C^\nu_{\mu\alpha}\right)V^{\bar k}\right] dy^{\bar\sigma}\otimes e_{\bar\omega}$$

$$\left(\frac{\partial y^{\bar\lambda}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar\sigma}} = \delta^{\bar\lambda}_{\bar\sigma}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial V^{\bar\omega}}{\partial y^{\bar\sigma}} + \left\{\frac{\partial y^{\bar\omega}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^{\bar\sigma}\partial y^{\bar k}} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar\sigma}}\cdot\frac{\partial y^{\bar\omega}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\bar k}}\cdot C^\nu_{\mu\alpha}\right\}V^{\bar k}\right] dy^{\bar\sigma}\otimes e_{\bar\omega}$$

これがテンソル ∇V の座標 $y^{\bar\lambda}$ に対する表現となるには、[ ] 内が

$$\frac{\partial V^{\bar\omega}}{\partial y^{\bar\sigma}} + V^{\bar k} C^{\bar\omega}_{\bar k\bar\sigma}$$

となることが必要。

$$\longrightarrow \quad C^{\bar\omega}_{\bar k\bar\sigma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar\sigma}}\cdot\frac{\partial y^{\bar\omega}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\bar k}}\cdot C^\nu_{\mu\alpha} + \underbrace{\frac{\partial y^{\bar\omega}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^{\bar\sigma}\partial y^{\bar k}}}$$

このような変換を $C^\nu_{\mu\alpha}$ が変換することで ∇V のテンソル性が保証される。

※「〰」の項は $C^\nu_{\mu\alpha}$ 自身がテンソルとして変換しないことを示す。

(c) 1-形式 および 一般のテンソル

微分 ∇ を一般のテンソルに拡張する。(*)

(*) 共変微分 (covariant derivative)
affine 接続 (affine connection)

▶ 1-形式
- スカラーとベクトルに対する作用
- Leibnitz 則

を仮定する。

◎ ベクトル u, 1-form $\tilde{\omega}$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{\omega}(u) = \omega_\mu u^\mu \quad \text{はスカラー}$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla_\alpha(\omega_\mu u^\mu) = (\nabla_\alpha \omega_\mu)\cdot u^\mu + \omega_\mu \cdot \nabla_\alpha u^\mu$$

Leibnitz 則

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\omega_\mu u^\mu) = u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\omega_\mu + \omega_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha} u^\mu$$

$$= (\nabla_\alpha \omega_\mu) u^\mu + \omega_\mu \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} u^\mu + u^\beta C^\mu_{\beta\alpha}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = u^\mu \left(\nabla_\alpha \omega_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\omega_\mu + \omega_\gamma C^\gamma_{\mu\alpha}\right)$$

任意の u について成立 ↓

$$\nabla_\alpha \omega_\mu = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\alpha} - C^\gamma_{\mu\alpha}\omega_\gamma$$

つまり $\nabla\tilde{\omega} = \left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\alpha} - C^\gamma_{\mu\alpha}\omega_\gamma\right) dx^\mu \otimes dx^\alpha$

$$\underset{\binom{0}{1}}{\tilde{\omega}} \xrightarrow{\nabla} \underset{\binom{0}{2}}{\nabla\tilde{\omega}}$$

▷ 一般のテンソルの場合

(ex) ベクトルと1-形式のテンソル積

$$Q = u \otimes \tilde{\omega} = u^\mu \omega_\nu e_\mu \otimes dx^\nu$$

$$\nabla Q = \nabla u \otimes \tilde{\omega} + u \otimes \nabla \tilde{\omega}$$

Leibnitz 則

$$\longrightarrow \nabla_\alpha Q = \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\alpha} + u^\mu C^\lambda_{\mu\alpha} \right) e_\lambda \otimes (\omega_k dx^k)$$

$$+ u^\lambda e_\lambda \otimes \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x^\alpha} - C^\gamma_{k\alpha} \omega_\gamma \right) dx^k$$

$$= \Big[\underbrace{\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\alpha} \cdot \omega_k + u^\lambda \cdot \frac{\partial \omega_k}{\partial x^\alpha}}_{= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u^\lambda \omega_k)} + u^\mu C^\lambda_{\mu\alpha} \cdot \omega_k - u^\lambda C^\gamma_{k\alpha} \omega_\gamma \Big] \times e_\lambda \otimes dx^k$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} Q^\lambda{}_k + Q^\mu{}_k C^\lambda_{\mu\alpha} - C^\gamma_{k\alpha} Q^\lambda{}_\gamma \right] e_\lambda \otimes dx^k$$

一般のテンソルの場合

- 成分の微分
- ベクトル的(上付き)添字と $C^\nu_{\alpha\beta}$ の "α-添字" との縮約
- 1-form的(下付き)添字と $C^\nu_{\alpha\beta}$ の "ν-添字" との縮約 × (−1)

の和をとる。

$$\left[\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\beta_1 \cdots \beta_k}{}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\beta_1 \cdots \beta_k}{}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} + \sum_i C^{\beta_i}_{\nu\alpha} T^{\beta_1 \cdots \nu \cdots \beta_k}{}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} \\ &\quad - \sum_j C^\lambda_{\gamma_j \alpha} T^{\beta_1 \cdots \beta_k}{}_{\gamma_1 \cdots \lambda \cdots \gamma_m} \end{aligned} \right]$$

▷ 方向微分

スカラーの場合と同様に、ベクトル U の方向へのベクトルや 1-form の変化率を定義できる。（※結果は元のテンソルと同じ階数のテンソルであることに注意）

$$V = V^\nu e_\nu \quad , \quad \tilde{\omega} = \omega_\alpha dx^\alpha$$

$$\nabla_U V = U^\lambda \nabla_\lambda V = U^\lambda \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\lambda} + V^\kappa C^\nu_{\kappa\lambda} \right) e_\nu \quad \text{（ベクトル）}$$

$$\nabla_U \tilde{\omega} = U^\lambda \nabla_\lambda \omega = U^\lambda \left(\frac{\partial \omega_\gamma}{\partial x^\lambda} - C^\kappa_{\gamma\lambda} \omega_\kappa \right) dx^\lambda \quad \text{（1形式）}$$

(ex) 2次元極座標

$\boxed{21}$ ヘーシェより

$$\left(\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\alpha} \equiv C^\beta_{\mu\alpha} e_\beta \right)$$

$$C^i_{rr} = 0 \quad (i = r, \varphi)$$

$$C^r_{r\varphi} = 0 , \quad C^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}$$

$$C^r_{\varphi r} = 0 , \quad C^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}$$

$$C^r_{\varphi\varphi} = -r , \quad C^\varphi_{\varphi\varphi} = 0$$

$$V = V^r e_r + V^\varphi e_\varphi \qquad \left(e_r = \frac{\partial}{\partial r} , \ e_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\begin{cases} \nabla_r V = \frac{\partial}{\partial r} V^r \cdot e_r + \left(\frac{\partial}{\partial r} V^\varphi + \frac{V^\varphi}{r} \right) e_\varphi \\ \nabla_\varphi V = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} V^r - r V^\varphi \right) e_r + \left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} V^r \right) e_\varphi \end{cases}$$

▷ 微分の notation

座標 x^μ とする

ex) テンソル $T = T^\alpha{}_\beta \, e_\alpha \otimes dx^\beta$

$$\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)} T = \nabla_\mu T = (\nabla_\mu T^\alpha{}_\beta) \, e_\alpha \otimes dx^\beta$$

$$= (T^\alpha{}_{\beta;\mu}) \cdot e_\alpha \otimes dx^\beta$$

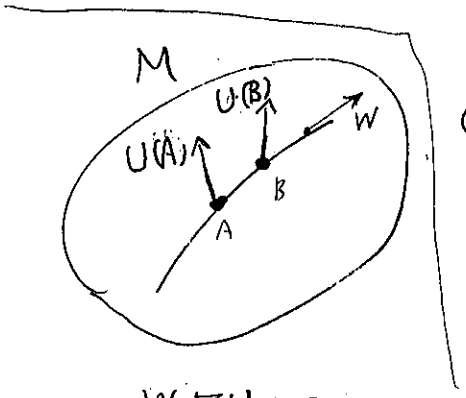
セミコロンを使うことが多い

$$T^\alpha{}_{\beta;\mu} = \underbrace{T^\alpha{}_{\beta,\mu}}_{\left(\frac{\partial}{\partial \mu} T^\alpha{}_\beta\right)} + C^\alpha_{\nu\mu} T^\nu_\beta - C^\kappa_{\beta\mu} T^\alpha{}_\kappa \qquad \left(T^\alpha{}_{\beta,\mu} \equiv \partial_\mu T^\alpha{}_\beta \right)$$

(D) 平行移動

多様体上のテンソルの"平行移動"

→ 曲線 $C(\lambda)$ をとり、その上の2点でのテンソルの比較を行なう　（単なる成分の比較ではない。→ 成分は基底のとり方によるため）



⇓

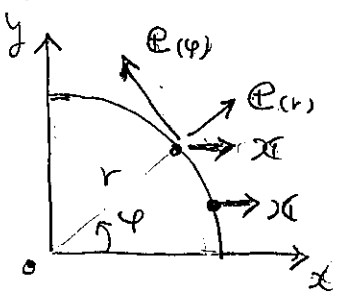
$C(\lambda)$ の接ベクトル W

$$\nabla_W T = W\cdot\nabla T = 0 \quad (T:\text{テンソル})$$

C に沿って T が平行移動されている（つまり比較すると同じである）ことの定義とする。

$$W\cdot\nabla U = 0$$

(ex.)



$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv x, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \equiv e_{(r)}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \equiv e_{(\varphi)}$$

• x の e_φ 方向への方向微分は？

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{\sin\varphi}{r} \\ -\sin\varphi & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{(r)} \\ e_{(\varphi)} \end{pmatrix}$$

r成分

$$(e_{(\varphi)}\cdot\nabla x)^r = \cancel{e^r_{(\varphi)}}^{\,0}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial r}x^r + x^j C^r_{jr}\right) + \underbrace{e^\varphi_{(\varphi)}}_{=1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}x^r + x^j C^r_{j\varphi}\right)$$

$$= -\sin\varphi + \left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cdot(-r)$$

x^φ　$C^r_{\varphi\varphi}$

$$= 0$$

φ成分

$$(e_{(\varphi)}\cdot\nabla x)^\varphi = \cancel{e^r_{(\varphi)}}^{\,0}\left(\frac{\partial}{\partial r}x^\varphi + x^j C^\varphi_{jr}\right) + \underbrace{e^\varphi_{(\varphi)}}_{=1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}x^\varphi + x^j C^\varphi_{j\varphi}\right)$$

$$= -\frac{\cos\varphi}{r} + \cos\varphi\cdot\frac{1}{r}$$

x^r　$C^\varphi_{r\varphi}$

$$= 0$$

よって、$e_{(\varphi)}\cdot\nabla x = 0 \Rightarrow x$ は $e_{(\varphi)}$ に沿って平行移動されている。

(E) Levi-Civita 接続と Christoffel 記号

※ 接続係数のとり方には任意性があり、それぞれの係数のとり方によって微分 ∇ の異なる定義（「接続」の定義）が可能

ここでは一般相対論に関係する特別な接続を導入

◉ 接続の制限

次の条件を接続に課す。

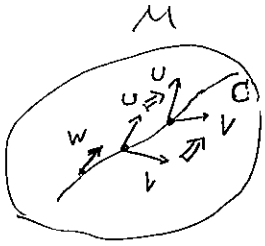
(i) 計量と可換（metric-compatible）

$$\nabla g = 0 \quad ; \quad g = g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu$$

(ii) ねじれが無い（torsion-free）

$$C^\nu_{\alpha\beta} = C^\nu_{\beta\alpha}$$

※ (i) だけを要請する接続は Riemann 接続（Riemannian connection）



(i) の条件は

ⓐ ベクトルの内積が平行移動で不変なこと

ⓑ「計量テンソル ⟷ 重力」の対応では、局所 Lorentz 系の存在を要請すること

に対応

ⓐ： ベクトル U, V, W ，計量 g

U, V の内積 $g(U, V)$

$$W\cdot\nabla(g(U,V)) = (W\cdot\nabla g)(U,V) + g(W\cdot\nabla U, V) + g(U, W\cdot\nabla V)$$

$\xrightarrow[\text{平行移動}]{\text{W に沿って}}$ $W\cdot\nabla U = 0$, $W\cdot\nabla V = 0$

$$\therefore\ W\cdot\nabla(g(U,V)) = (W\cdot\nabla g)(U,V)$$

$\nabla g = 0 \Rightarrow W\cdot\nabla(g(U,V)) = 0 \rightarrow g(U,V)$ は不変

※ $C^{\nu}_{\alpha\beta}$ はテンソルでないが、反対称化したものはテンソルとなる

条件 (ii) は $C^{\nu}_{\alpha\beta} - C^{\nu}_{\beta\alpha} \equiv T^{\nu}_{\alpha\beta}$ (torsion tensor)

が恒等的に 0 ということ

※ 一般相対論の拡張重力理論 "Einstein−Cartan理論" では

$T^{\nu}_{\alpha\beta} \neq 0$ となっている。

制限 (i), (ii) により、接続係数の形は次のように決まる。

$$C^{\nu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\lambda\beta} + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} g_{\alpha\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} g_{\alpha\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\nu}\left(g_{\lambda\beta,\alpha} + g_{\alpha\lambda,\beta} - g_{\alpha\beta,\lambda}\right)$$

この $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ を Christoffel 記号といい、これを接続係数として採用する接続(微分規則)を Levi-Civita 接続という。

(ex.) 3次元円筒座標 (R, φ, z)

$$g = dR \otimes dR + R^2 d\varphi \otimes d\varphi + dz \otimes dz$$

$$g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & \varphi & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R \\ \varphi \\ z \end{array}$$

$\Gamma^{R}_{\varphi\varphi} = -R$, $\Gamma^{\varphi}_{R\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi R} = \frac{1}{R}$, それ以外の成分 $= 0$

ベクトル $\mathbb{A} = A^R\left(\frac{\partial}{\partial R}\right) + A^{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + A^{z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ に対して

$$(\nabla_R \mathbb{A})^i = \frac{\partial}{\partial R} A^i + \Gamma^i_{jR} A^j = \left(\underset{R}{\frac{\partial}{\partial R} A^R}, \underset{\varphi}{\frac{\partial}{\partial R} A^{\varphi} + \frac{1}{R} A^{\varphi}}, \underset{z}{\frac{\partial}{\partial R} A^{z}}\right)$$

$i = R, \varphi, z$

$$(\nabla_{\varphi} \mathbb{A})^i = \frac{\partial}{\partial \varphi} A^i + \Gamma^i_{j\varphi} A^j = \left(\underset{R}{\frac{\partial}{\partial \varphi} A^R}, \underset{\varphi}{\frac{\partial}{\partial \varphi} A^{\varphi} + \frac{1}{R} A^R}, \underset{z}{\frac{\partial}{\partial \varphi} A^{z}}\right)$$

$$(\nabla_z \mathbb{A})^i = \frac{\partial}{\partial z} A^j + \Gamma^i_{jz} A^j = \left(\frac{\partial}{\partial z} A^R, \frac{\partial}{\partial z} A^{\varphi}, \frac{\partial}{\partial z} A^{z}\right)$$

☆ Christoffel 記号の導出

$\nabla g = 0$ の成分を cyclic に書き下す.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\alpha\mu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\alpha\lambda} = 0 & ① \\ \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\alpha} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} g_{\nu\lambda} = 0 & ② \\ \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} g_{\mu\lambda} = 0 & ③ \end{cases}$$

① + ② − ③ :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu} - (\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}) g_{\lambda\mu} - (\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}) g_{\nu\lambda}$$
$$- (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) g_{\alpha\lambda}$$

($g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$ etc.)

$\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}$, $\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ (torsion free)

$$\Downarrow$$

$$2 g_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu}$$

$\times g^{\beta\alpha}$

$$2 \Gamma^\beta_{\mu\nu} = g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu} \right)$$

$$\therefore \Gamma^\beta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) //$$

★ Christoffel 記号の便利な公式

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g}) \quad ; g = \det(g_{\mu\nu})$$

※ 行列 M について、M を微小に変化させたとき ($M \Rightarrow M + \delta M$)

$\ln|\det M|$

の変化を考える。

$$\delta \ln|\det M| = \ln|\det(M+\delta M)| - \ln|\det M|$$

$$= \ln \frac{\det(M+\delta M)}{\det M}$$

$$= \ln\left(\det M^{-1}(M+\delta M)\right)$$

$$= \ln\det(\mathbb{1} + M^{-1}\delta M)$$

$\det(\mathbb{1}+\varepsilon) = 1 + \mathrm{Tr}\,\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ $\quad$ ε: 要素 $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$ の行列

なので、

$$\delta \ln|\det M| = \ln(1 + \mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M))$$

$$\simeq \mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M)$$

よって、$M_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ のとき、

$$\delta \ln|\det g| = g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \ln|\det g|}{\partial x^\mu} = g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta}$$

$\det g = g < 0$ より

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\ln(-g) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\ln\sqrt{-g}$$

(2-3-6) 積分

ここでは 4元スカラー量の積分を考える.

(一般の多様体上のテンソルの積分については後述

cf. シュッツ：物理学における幾何学的方法（吉岡）

深谷：解析力学と微分形式（岩波）)

ex. 3次元ユークリッド空間

体積要素 (volume element)

$$dV = dx\,dy\,dz \qquad \text{(Cartesian)}$$

$$(x, y, z) \rightleftarrows (\xi, \eta, \zeta)$$

$$dV = dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}\right| d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

Jacobian

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

球座標 (r, θ, φ)

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

4次元

$$x^{\mu'} \longleftrightarrow x^{\mu}$$

$$\eta_{\mu'\nu'} = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow g_{\mu\nu}$$

$$dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} \longleftrightarrow \left|\frac{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\right| dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

$$\equiv \underline{J} \cdot dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta}\eta_{\mu'\nu'} = g_{\alpha\beta}$$

$$\Downarrow \text{ det.} \qquad |A| = \det A \ ; \ A : \text{matrix}$$

$$\underbrace{\left|\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\right|}_{J}\cdot\underbrace{\left|\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta}\right|}_{J}\cdot\underbrace{|\eta_{\mu'\nu'}|}_{-1} = \underbrace{|g_{\alpha\beta}|}_{g = \det(g_{\mu\nu})}$$

$$\therefore \ J^2 = -g \quad , \quad J = \sqrt{-g}$$

$$\underline{d\Omega \equiv \sqrt{-g}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \equiv \sqrt{-g}\, d^4x}$$

(不変体積要素)

※ 3次元空間の計量を $dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$ とすると

$$dV = \sqrt{\gamma}\, d^3x$$

(2-3-7) 一般化した Levi-Civita テンソル

Minkowski

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & (\mu\nu\alpha\beta) \text{ が } (0,1,2,3) \text{ の偶置換} \\ 0 & \\ -1 & \text{〃 奇置換} \end{cases}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = [\mu\nu\alpha\beta]$ と也書く. $([0123] = +1)$

一般の時空

$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-g}\,[\mu\nu\alpha\beta]$ が完全反対称 4階テンソル

で、Minkowski の Levi-Civita に対応

2-4 Lorentz 多様体を数学的モデルとした時空の記述

重力の無い時空 → Minkowski 時空 (数学的モデル)

- 計量 $\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$
- 事象 = 多様体上の点
- $m>0$ の物体の運動 ⇒ 時間的曲線

  $m=0$ 〃 ⇒ ヌル的曲線

重力のある時空

- 局所的には重力の無い時空と等価
- (2-1-14) での議論 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \to ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

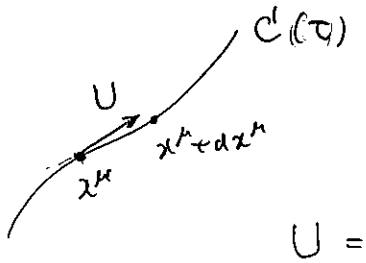
  局所的に Minkowski なら

重力のある一般の時空は Lorentzian 計量(符号 $(-1,+1,+1,+1)$)をもつ

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Lorentzian 多様体を数学的モデルとする.

- $m>0$ の物体の運動 → 時空多様体上の曲線 C



C 上の interval

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0$$

$$\equiv -d\tau^2 \quad (\text{固有時 } \tau \text{ の定義})$$

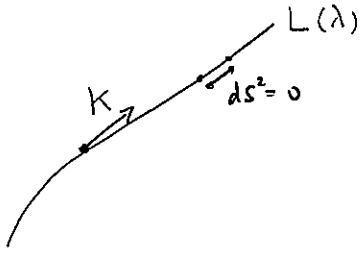
$$U = \frac{dx^\mu}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$$: 物体の4元速度

$$U\cdot U = g(U,U) = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -1$$

- $m=0$ の物体の運動

ヌル的曲線 L ⇒ その上での interval は常に 0

∵ 接ベクトルのノルム = 0



固有時^2 $= -ds^2 = 0$ → パラメータとして使えない

$$K = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$$: 物体の4元速度

$$K\cdot K = g(K,K) = g_{\mu\nu}K^\mu K^\nu = 0$$

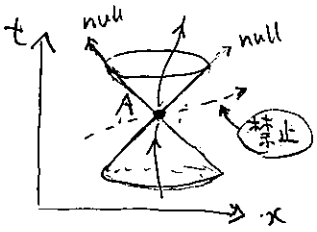
λ: affine パラメータ (任意性あり)

$\left(\frac{d^2}{d\lambda^2}x^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \right.$ と書けるようなパラメータ (後の 2-5 参照)

▷ 因果構造 (causal structure)

Minkowski 時空 — ヌル的曲線のつくる光円錐が基準

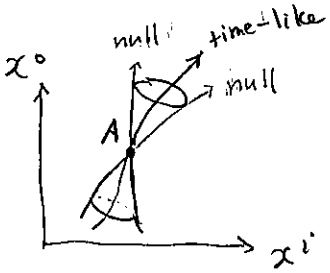
・光円錐は Lorentz 不変



事象Aを通る時間的曲線はAを頂点とする光円錐内部にある

一般の時空 ・局所的に Minkowski
・ヌル的曲線は一般座標変換に対して不変 ($ds^2=0$)

⟶ 光円錐 (ヌル的曲線の束で定義) を基準とする.



事象Aを通る時間的曲線はAを頂点とする光円錐内部にある (局所的には)

▷ 物理法則の書き換え

Minkowski 時空 ⟶ 一般の時空

・特殊相対性原理 ・一般相対性原理

・テンソル量 ・テンソル量

・∂_μ ・∇_μ

◎ 特殊相対論で成り立っていたテンソル方程式で $\partial_\mu \to \nabla_\mu$ と置換えると自動的に重力の効果が考慮されるのではないか? ⟶ YES.!

※ $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ のとき $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \to 0$ なので、$\nabla_\mu \to \partial_\mu$ となる

⇒ 「一般の時空」は Minkowski の場合を含む

32の補足

"Alcubierre's warp drive" : 一般相対論の範囲でのワープ航法

M. Alcubierre, Class. Quantum Grav., 11, L73 (1994)

局所的に時間的な世界線上の運動が大局的に光速を越え得る.

▷ 計量

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - v_s(t)\cdot f(r_s)dt]^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{—} (*)$$

$$\begin{cases} r_s = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2} \\ v_s(t) = \dfrac{dx_s(t)}{dt} \end{cases}$$

$f(r_s)$ は $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(r_s > R) = 0 \end{cases}$ Rはある正の実数

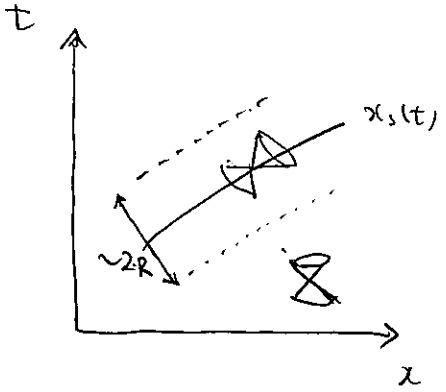
$\begin{cases} f\text{の形（warp driveで時空の曲げ方）} \\ x_s(t)\text{の形（局所的には時間的な世界線：} ds^2 < 0) \end{cases}$

をうまくとれば計量(*)がアインシュタイン方程式の解となるようにできる

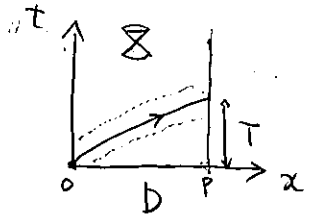
(*)の計量の性質

- $r > R$ で $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ ⇒ Minkowski
- $r \leq R$ での光円錐 $(y = z = 0)$

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1 + v_s(t)\cdot f(r_s)$$



- $x = x_s(t)$ は時間的世界線 ⇒ 局所的に光速より遅い
- $x = x_s(t)$ の周囲で光円錐は傾く



$\dfrac{P}{T} > 1$ でもよい.

(ex)

・質点の運動方程式

$$m\frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu = f^\mu$$ 4元力（重力以外） [Minkowski]

$$\Big\downarrow \left(\frac{d}{d\tau}x^\mu \equiv u^\mu\right)$$

$$m\frac{d}{d\tau}u^\mu = f^\mu \Rightarrow m\underbrace{\frac{dx^\nu}{d\tau}}_{u^\nu}\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} = f^\mu$$

$$\Rightarrow m u^\nu \partial_\nu u^\mu = f^\mu$$

$$\Big\Downarrow \quad \partial_\nu \longrightarrow \nabla_\nu$$

$$m u^\nu \nabla_\nu u^\mu = f^\mu$$ [一般の時空]

"重力"は ∇_ν の中の $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ に含まれる（cf. §2 6 ~~p.40~~）

・Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu, \quad \partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]} = 0$$ [Minkowski]

$$\Big\Downarrow \quad \partial_\mu \longrightarrow \nabla_\mu$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu, \quad \nabla_{[\mu}F_{\nu\lambda]} = 0$$

・完全流体のエネルギー運動量保存

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad ; \quad T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}$$

$$\Big\Downarrow \quad \partial_\nu \longrightarrow \nabla_\nu \quad \& \quad \eta^{\mu\nu} \longrightarrow g^{\mu\nu}$$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad ; \quad T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

2-5 測地線 (geodesics)

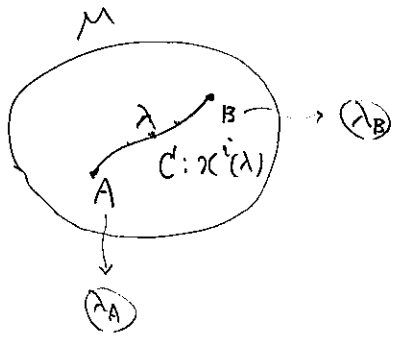
計量の与えられた多様体上の任意の2点を結ぶ曲線のうち、"長さ"が極値をとるもの ⇒ 測地線

二次元平面上では2点を結ぶ直線が長さの極小値(最小値)を与える。

---

ex. Riemann 多様体

計量 $dl^2 = \gamma_{ij}\, dx^i dx^j \quad (i, j = 1 \sim 3)$



実数 λ でパラメータ付けられた曲線 $C: x^i(\lambda)$

$$I = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{\gamma_{ij}\, dx^i dx^j}$$

$$= \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \cdot \frac{dx^j}{d\lambda}}$$

$\frac{dx^i}{d\lambda}$: $C(\lambda)$ の接ベクトルの成分

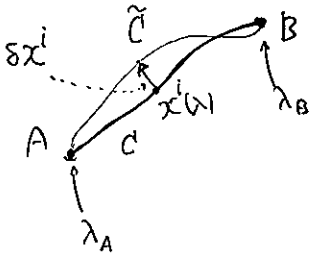
λ として C に沿った距離そのものをとってみる。

$$I = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\gamma_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} \qquad \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\lambda}$$

すると、C 上では $\gamma_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j = 1$

C から微小に変位した曲線 $\tilde{C}(\lambda)$ をとる (同じ λ でパラメータ表示)

(※ $\tilde{C}(\lambda)$ 上では $\gamma_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j \neq 1$)



$$\delta I = \underbrace{\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\gamma_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}}_{C(\lambda)} - \underbrace{\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\gamma_{ij}\, \dot{\tilde{x}}^i \dot{\tilde{x}}^j}}_{\tilde{C}(\lambda)}$$

$$\delta I = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \ \delta\sqrt{\gamma_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j}$$

$$= \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \cdot \frac{1}{2\underbrace{\sqrt{\gamma_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j}}_{1}}\ \delta\left(\gamma_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \ \delta\left(\gamma_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j\right)$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x, \cancel{\dot{x}}) \ \rightarrow\ \delta\gamma_{ij} = \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k}\,\delta x^k$$

すると.

$$\delta\left(\gamma_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j\right) = \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k}\cdot\dot{x}^i\dot{x}^j\,\delta x^k + \gamma_{ij}\,\delta\dot{x}^i\dot{x}^j + \gamma_{ij}\,\dot{x}^i\,\delta\dot{x}^j$$

$$= \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k}\cdot\dot{x}^i\dot{x}^j\,\delta x^k + \left(\gamma_{ij}\,\dot{x}^j\,\delta x^i\right)^{\bullet} - \left(\gamma_{ij}\,\dot{x}^j\right)^{\bullet}\cdot\delta x^i$$

$$+ \left(\gamma_{ij}\,\dot{x}^i\,\delta x^j\right)^{\bullet} - \left(\gamma_{ij}\,\dot{x}^i\right)^{\bullet}\delta x^j$$

$$= (\quad)^{\bullet} + \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k}\,\dot{x}^i\dot{x}^j\,\delta x^k$$

$$- \left(\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^l}\,\dot{x}^l\dot{x}^j + \gamma_{ij}\,\ddot{x}^j\right)\delta x^i$$

$$- \left(\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^l}\,\dot{x}^l\dot{x}^i + \gamma_{ij}\,\ddot{x}^i\right)\delta x^j$$

$$\therefore\ \delta I = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda\cdot(\quad)^{\bullet}}_{\text{"表面項"}\ =\ 0} + \frac{1}{2}\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda\cdot\left[\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k}\,\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial\gamma_{kj}}{\partial x^i}\,\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x^j}\,\dot{x}^j\dot{x}^i\right.$$

$$\left. - \left(\gamma_{kl} + \gamma_{lk}\right)\ddot{x}^l\right]\delta x^k$$

(※ うまく dummy 添字を書き換える)

これが任意の変分 δx^k に対して停留する条件

$$\longrightarrow\ \left(\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial\gamma_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x^j}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j - \left(\gamma_{kl} + \gamma_{lk}\right)\ddot{x}^l = 0$$

γ^{mk} を掛けて整理 $\quad (\gamma^{mk}\gamma_{kl} = \delta^m_l)$

$$\ddot{x}^m + \frac{1}{2}\cdot\gamma^{mk}\left(\frac{\partial\gamma_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i x^j = 0$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d^2x^m}{d\lambda^2} + \Gamma^m_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \quad \text{—— } (*)$$

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\gamma^{mk}\left(\frac{\partial\gamma_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

（計量 γ_{ij} に対する Christoffel 記号）

▲ γ を計量とする Riemann 多様体上の測地線は $(*)$ の形になる。
λ : アフィン (affine) パラメータ

擬 Riemann 多様体上での測地線も同様に定義され、
$(*)$ と同じ形式になる。

◎ Lorentzian 多様体の時間的 (time-like) 曲線

計量 g （符号 $(-+++)$）

固有時 $d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$

$$I = \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \sqrt{\underset{\ominus}{-}\, g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

τ を アフィンパラメータとする。

$$\longrightarrow \quad \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad \text{—— } (**)$$

(2-1-4) で EEP を用いて求めた自由質点の運動方程式は
正にこの形であった。

重力のみが働く自由質点は時空の測地線上を運動する。

4元速度を用いた表式

$\frac{dx^\mu}{d\tau} = U^\mu$ とすると、(**) は

$$\frac{d}{d\tau}U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}U^\alpha = \frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} = U^\beta\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}$$

$$U^\beta\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}U^\mu U^\beta = 0$$

$$\therefore \underline{U^\beta \nabla_\beta U^\alpha = 0} \qquad (U\cdot\nabla U = 0)$$

⇒ U は、それを接ベクトルとする曲線に沿って平行移動している

☆ 測地線方程式を導くもう一つの作用積分

$$\tilde{I} \equiv \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \cdot \underbrace{\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}_{\text{"Lagrangian" ⇔ "速度"の2次形式}}$$

も同じ測地線方程式を与える。

◎ null的測地線（質量ゼロ）

$$I \equiv \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \cdot g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\cdot\frac{dx^\nu}{d\lambda} \qquad \lambda:\ \text{affine パラメータ}$$

を変分して停留解を求める。

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \qquad \text{ただし、} \underbrace{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\cdot\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0}_{\text{null 条件}}$$

また $K^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ とすると、

$$K^\beta\nabla_\beta K^\alpha = 0 \quad ; \quad K^\alpha K_\alpha = 0$$

▷ 重力が弱く、物体の速さが遅いとき（時間的測地線）
Newton の運動方程式は再現できるか？

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$　　$|h_{\mu\nu}| \ll 1$ かつ $h_{\mu\nu}$ は時間的に変化しない

$$\longrightarrow \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \fallingdotseq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}(\partial_\gamma h_{\mu\beta} + \partial_\beta h_{\mu\gamma} - \partial_\mu h_{\beta\gamma})$$

一方　$\frac{dx^\beta}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^j}{d\tau}\right)$ において　$(j=1\sim3)$

$$\left|\frac{dx^i}{dt}\right| \ll 1 \quad (c=1) \Rightarrow \left|\frac{dt}{d\tau}\right| \gg \left|\frac{dx^j}{d\tau}\right|$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x^i + \Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$　（測地線方程式の i 成分）$i=1\sim3$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x^i + \frac{1}{2}\eta^{i\mu}(\partial_\gamma h_{\mu\beta} + \partial_\beta h_{\mu\gamma} - \partial_\mu h_{\beta\gamma})\frac{dx^\beta}{d\tau}\cdot\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x^i + \frac{1}{2}(\cancel{\partial_0 h_{i0}}^{\,0} + \cancel{\partial_0 h_{i0}}^{\,0} - \partial_i h_{00})\cdot\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} \simeq 0 \qquad (x^0 = t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x^i - \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\cdot\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \simeq 0$$

ここで　$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2\left\{\left(1 - \delta_{ij}\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}\right) - h_{00} - 2h_{0i}\cdot\frac{dx^i}{dt} - h_{ij}\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}\right\}$

$$\simeq dt^2$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2}x^i \simeq -\frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{h_{00}}{2}\right) \Leftrightarrow \overset{\text{(Newton)}}{\frac{d^2}{dt^2}x^i = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i}}$$

ϕ：重力ポテンシャル

この極限で測地線方程式は Newton の運動方程式を再現する。

$$\phi = -\frac{1}{2}h_{00}$$

◎ 測地線と保存則

質量 $m \neq 0$ の粒子の4元運動量

$$p^\mu = m U^\mu \qquad \left(U = U^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \frac{dx^\mu}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \right)$$

測地線は

$$U \cdot \nabla U = 0 \longrightarrow p \cdot \nabla p = 0 \quad \text{とも書ける}$$

$$p^\beta \nabla_\beta p^\alpha = 0$$

$$\downarrow \times g_{\alpha\mu}$$

$$0 = g_{\mu\alpha} p^\beta \nabla_\beta p^\alpha = p^\beta \nabla_\beta (g_{\mu\alpha} p^\alpha) \qquad (\because \underline{\nabla g = 0})$$

$$= p^\beta \nabla_\beta p_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad p^\beta (\partial_\beta p_\alpha - \Gamma^\kappa_{\alpha\beta} p_\kappa) = 0 \xrightarrow{p^\beta = m\frac{dx^\beta}{d\tau}} m \frac{d}{d\tau} p_\alpha = \Gamma^\kappa_{\alpha\beta} p^\beta p_\kappa \quad \text{— (*)}$$

(*) の右辺

$$\Gamma^\kappa_{\alpha\beta} p^\beta p_\kappa = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}) p^\beta p_\kappa$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}) p^\beta p^\lambda$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta}) \cdot p^\lambda p^\beta \qquad \left(\begin{array}{l} \because \text{( ) 内の第2&3項は } \lambda \leftrightarrow \beta \text{ に反対称、} \\ p^\beta p^\lambda \text{ は } \lambda \leftrightarrow \beta \text{ に対称、} \end{array} \right)$$

$$\therefore \ (*) \Rightarrow \quad m \frac{dp_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta}) p^\lambda p^\beta \quad (**)$$

[この式の意味]

ある x^α 座標について $\partial_\alpha g_{\lambda\beta} = 0$ （$g_{\lambda\beta}$ が x^α に依存しない）なら、

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = 0 \rightarrow p_\alpha = \text{constant.} \quad \text{（測地線に沿って）}$$

つまり、p_α は運動の恒量となる。

(ex). 弱い重力場の時空でのエネルギー、角運動量保存（§3）

▷ 計量が与えられたとき Christoffel 記号を簡単に計算する方法
("geodesic Lagrangian method")

計量 $g_{\mu\nu} \Longrightarrow \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$?

$$I = \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}} \rightarrow \delta I = 0 \rightarrow \ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = 0$$

$$\left(\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)$$

or

$$\tilde{I} = \int d\tau \; g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} \xrightarrow{\delta\tilde{I} = 0}$$

☆ $\tilde{I}$ を直接変分して $\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = 0$ の形の式をつくる
$\longrightarrow$ $\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}$ の係数が $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ となっている。

(ex) $dl^2 = dR^2 + R^2 d\varphi^2 + dz^2$ (3次元 Euclid)

$$\frac{dR}{d\lambda} \equiv \dot{R}, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} \equiv \dot{\varphi}, \quad \frac{dz}{d\lambda} \equiv \dot{z} \qquad (\lambda : \text{パラメータ})$$

$$I \equiv \int d\lambda \left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \qquad \left(g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & \varphi & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & R^2 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R \\ \varphi \\ z \end{array} \right)$$

① まず R を変分

($\dot{z}^2$ の項に R は入っていない)

$$\delta I_R = \int d\lambda \left(\delta(\dot{R}^2) + \delta(R^2\dot{\varphi}^2)\right) \qquad \leftarrow \delta(\dot{R}^2) = 2\dot{R}\cdot\delta\dot{R}$$

$$= \int d\lambda \left(2\dot{R}\delta\dot{R} + \delta(R^2)\cdot\dot{\varphi}^2\right) \qquad \leftarrow \delta(R^2) = 2R\cdot\delta R$$

$$= \int d\lambda \cdot 2\left(\underline{\dot{R}\delta\dot{R}} + R\dot{\varphi}^2\cdot\delta R\right)$$

$\dot{R}\delta\dot{R}$ の項を部分積分

$$= \int d\lambda \cdot 2\left\{\underline{(\dot{R}\delta R)^{\cdot} - \ddot{R}\delta R} + R\dot{\varphi}^2\delta R\right\}$$

$(\dot{R}\delta R)^{\cdot}$ は表面項なので落ちる

$$= 2\int d\lambda \left\{-\ddot{R} + R\dot{\varphi}^2\right\}\delta R$$

δR は任意なので $\delta I_R = 0 \rightarrow -\ddot{R} + R\dot{\varphi}^2 = 0$

$$\ddot{R} + \underbrace{(-R^2)}\dot{\varphi}\cdot\dot{\varphi} = 0 \quad \underset{\text{比較}}{\longleftrightarrow} \quad \ddot{R} + \Gamma^{R}_{ab}\dot{x}^{a}\dot{x}^{b} = 0 \qquad \left(x^a = (R, \varphi, z)\right)$$

$$\Longrightarrow \Gamma^{R}_{\varphi\varphi} = -R^2$$

その他の $\Gamma^R_{ab} = 0$

② 次に φ を変分

$\dot{R}^2, \dot{z}^2$ は φ に依らない

$$\delta I_\varphi = \int d\lambda \cdot R^2 \delta(\dot{\varphi}^2)$$

$\leftarrow \delta(\dot{\varphi}^2) = 2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}$

$$= \int d\lambda \cdot 2\underline{R^2\dot{\varphi}\cdot\delta\dot{\varphi}}$$

$$= \int d\lambda \cdot 2\left\{\underline{(R^2\dot{\varphi}\delta\varphi)^{\cdot} - (R^2\dot{\varphi})^{\cdot}\cdot\delta\varphi}\right\}$$

← 部分積分

表面項 $(R^2\dot{\varphi}\delta\varphi)^{\cdot}$ は落ちる

$$= -2\int d\lambda\, (R^2\dot{\varphi})^{\cdot}\,\delta\varphi$$

$$= -2\int d\lambda \cdot (R^2\ddot{\varphi} + 2R\cdot\dot{R}\dot{\varphi})\,\delta\varphi$$

$$\delta I_\varphi = 0 \longrightarrow R^2\ddot{\varphi} + 2R\cdot\dot{R}\dot{\varphi} = 0$$

$$\therefore\ \ddot{\varphi} + \frac{2}{R}\dot{R}\dot{\varphi} = 0 \iff \ddot{\varphi} + \Gamma^\varphi_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 0$$

※ $\Gamma^\varphi_{ab} = \Gamma^\varphi_{ba}$ に注意

$$\ddot{\varphi} + \underline{\Gamma^\varphi_{R\varphi}}\dot{R}\dot{\varphi} + \underline{\Gamma^\varphi_{\varphi R}}\dot{\varphi}\dot{R} + \cdots = 0$$

$$\therefore\ \Gamma^\varphi_{R\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi R} = \frac{1}{R}$$, その他の $\Gamma^\varphi_{ab} = 0$

③ z を変分

部分積分

$$\delta I_z = \int d\lambda\ \delta(\dot{z}^2) = 2\int d\lambda\, \dot{z}\delta\dot{z} = -2\int d\lambda \cdot \ddot{z}\delta z$$

$$\delta I_z = 0 \longrightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow \Gamma^z_{ab} = 0$$

◎ Riemann 正規座標と局所慣性系

任意の時空点近傍で計量が"$\eta_{\mu\nu}$"，Christoffel 記号が 0 となる座標系がとれる（局所慣性系）

cf. EEP → "局所的に特殊相対論が正しい"ことの数学的表現

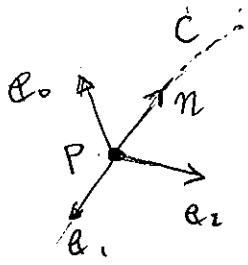
Riemann 正規座標（Riemann normal coordinate）

(i) 時空点 P において，正規直交基底をとる．

$\{e_0, e_i\}$ $i=1\sim3$.

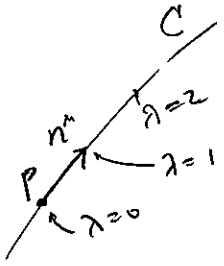
$$\left(\begin{array}{l} g(e_0,e_0)=-1, \quad g(e_0,e_i)=0 \\ g(e_i,e_j)=\delta_{ij} \end{array}\right)$$

⇒ $\{e_0, e_i\}$ を（座標）基底にとれば，その座標で $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$



(ii) P から任意の単位ベクトル n^μ の方向へ測地線 C を伸ばす

- affine パラメータ λ は
  - n が空間的 ⇒ 測地線に沿った固有距離 s
  - n が時間的 ⇒ 〃 固有時 τ
- $\lambda=0$ at P



$$C: \quad \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\lambda}=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^\mu(P)=0 \\ \frac{dx^\mu}{d\lambda}(P)=n^\mu \end{array}\right.$$

(iii) C 上のパラメータ λ の点の座標 x^α として

$$x^\alpha=\lambda n^\alpha$$

をとる．n ベクトル n を変えて，P 周囲の時空点に座標を与える．

※ この座標では

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2}{d\lambda^2}x^\alpha=0 \text{ より}, \quad \Gamma^\mu_{\nu\lambda}n^\nu n^\lambda=0 \Rightarrow \underline{\Gamma^\mu_{\nu\lambda}=0} \\ \frac{d}{d\lambda}x^\alpha=n^\alpha \end{array}\right.$$