

§ 4 球対称真空中の時空 (Schwarzschild 時空) ... Einstein 方程式

□
△ 解析解

4-1 太陽などの星の外部の時空

- (回転(じてんなん), black hole, white hole, worm hole の外の時空)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM_0}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM_0}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Schwarzschild 時空

c : 真空中の光速

($c=1$ の単位系)

G : 重力定数 (Newton の万有引力定数)

M_0 : 質量定数 \Rightarrow 質量の次元をもつ (星, black hole の質量と解釈)

- また、次元を確認

$$[G] = [M^{-1} L^3 T^{-2}]$$

$$\text{もし } [M_0] = [M] \text{ をもと}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{2GM_0}{c^2 r}\right] &= [M^{-1} L^3 T^{-2}] \cdot [M] \cdot [T^2 L^{-2}] \cdot [L^{-1}] \\ &= [M^0 L^0 T^0] \rightarrow \text{無次元} \Rightarrow \text{o.k.} \end{aligned}$$

▷ 簡単化のために次の単位系を導入

$$c=1 \quad (\text{既出})$$

$$G=1$$

} Geometrized unit
(幾何学化単位系)

$$[c=1] \text{ 単位系では } [t] = [T]$$

$(c=1)$

$$[G=1] \text{ も加えると } [r] = [M] \quad), \quad \frac{2GM_0}{c^2 r} \downarrow \Rightarrow \frac{2M_0}{r} \leftarrow \text{同じ次元}$$

この単位系で M_0 ($= \frac{GM_0}{c^2}$) は長さの次元をもつ

この長さを 重力半径 (gravitational radius) r_g といふ

$$r_g = \frac{GM_0}{c^2} \xrightarrow{\uparrow} M_0$$

$(c=1)$

Schwarzschild 計量

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)} \quad (1)$$

(* $M_0 \rightarrow M$ のとき)

Schwarzschild 座標 (t, r, θ, φ)

Eq.(1) の 計量が現れる座標 (t, r, θ, φ) は次の特別な性質をもつ

- i) metric 係数が時間に依存しない、
- ii) 時間反転について計量が不变 ($t \rightarrow -t$ で不变)
- iii) (θ, φ) 座標の部分は 2 次元球面の metric (半径 $= r = \text{一定}$)
- i), ii) は 時空が 静的 (static) で 時空の定義 (i). だけ満たす場合は定常 (stationary)
- iii) は 時空が $t = \text{一定}$, $r = \text{一定}$ の面内で 回転対称性を持つこと を示す。
↓
"球対称"

* もちろん、この同じ時空に全く一般の座標を入れることも可能で、

その座標では 計量は (1) のようにはならぬ。

しかし、時空の対称性をもつては座標変換で失なわれない、

> Schwarzschild 座標はこの 対称性を明示 してくれる便利な座標

- 時間推進と反転
- 回転

* - * より詳しい時空の対称性の議論は

"Lie 微分", "Killing ベクトル" など、概念を導入して行なう

4-2 Schwarzschild 時空の 漸近地線

Schwarzschild 時空の 性質を調べるために、自由質点の運動を考へる。

(A) 運動の 恒量

Eq. (1) は 計量が $t, \varphi \rightarrow$ 空間によらないことを示す。

$$\partial_t g_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0$$

\Rightarrow 質点、4元運動量 \dot{t}^{μ} は

$$P_t = g_{tt} \dot{t}^t, \quad P_\varphi = g_{\varphi\varphi} \dot{t}^\varphi$$

がこれぞれ 運動の 恒量となる。

質量 m とし、4元運動量の 1ルムは

$$\dot{t}^\mu \dot{t}_\mu = -m^2$$

$$\rightarrow -(1-\frac{2M}{r})(\dot{t}^t)^2 + \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}(\dot{t}^r)^2 + r^2(\dot{t}^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (\dot{t}^\varphi)^2 = -m^2 \quad (2)$$

§2-5 ⑨ と §3 ②, ③ の

$$E \equiv -P_t = +(1-\frac{2M}{r}) \cdot \dot{t}^t, \quad L \equiv r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{t}^\varphi$$

は これぞ質点のエネルギー、角運動量となる。

(B) $m \neq 0$

・ 時空の 球対称性から、最初に $\theta = \frac{\pi}{2}$ とすると 以後に $\theta = \frac{\pi}{2}$ で運動。

$$\rightarrow \frac{dr}{d\tau} \neq 0, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0 \quad \text{とする。}$$

$$(2) \rightarrow -\frac{E^2}{1-\frac{2M}{r}} + \frac{m^2(\frac{dr}{d\tau})^2}{1-\frac{2M}{r}} + \frac{L^2}{r^2} = -m^2 \quad (3)$$

$\frac{E}{m} = \tilde{E}, \quad \frac{L}{m} = \tilde{L}$ とし、単位質量あたりの エネルギー、角運動量を 定義
 ↑
 比角運動量
 (specific angular momentum)

$$\tilde{E}^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (4)$$

$\frac{dr}{d\tau}$: 質点の動径方向の速度（を固有時で測りたもの）

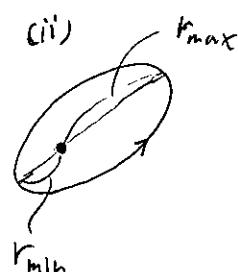
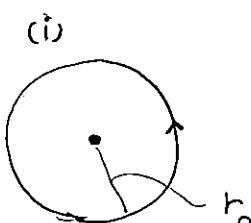
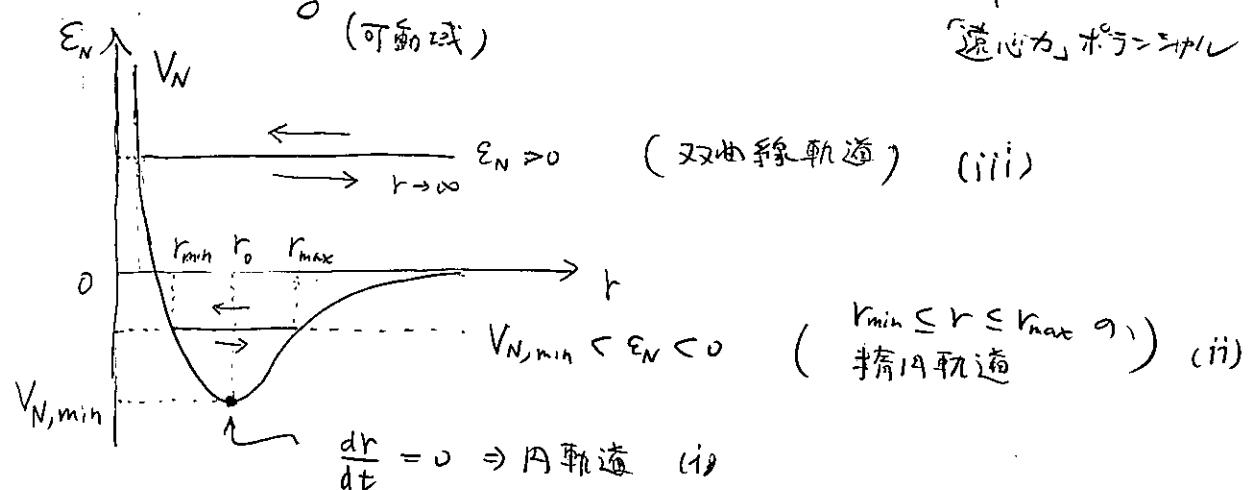
$$(4) \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - V(r) \quad V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (5)$$

\uparrow \uparrow
運動エネルギー V ポテンシャル V

cf. Newton 力学での球対称ポテンシャル $\phi = -\frac{GM}{r}$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \varepsilon_N - V_N \quad ; \quad V_N(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2}$$

\uparrow \uparrow
運動エネルギー V_N 遠心力ポテンシャル



(5) ⑨ 運動を 同様化 朝へなれ

・ポテンシャル V の 振舞

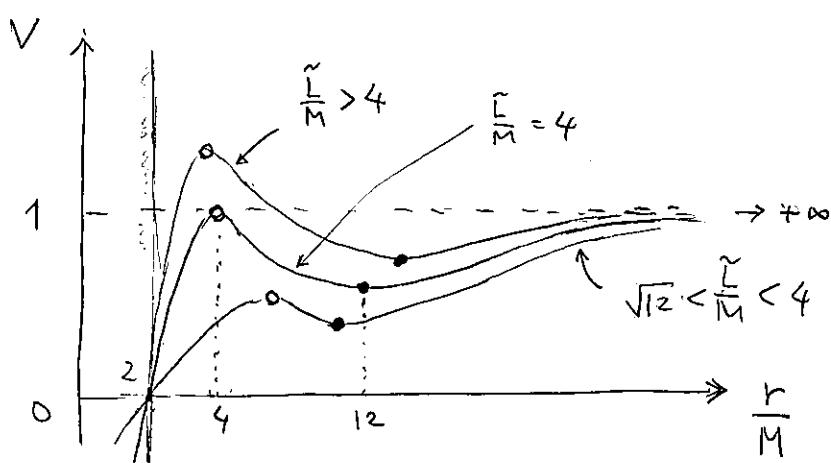
$$\frac{dV}{dr} = \frac{2}{r^4} (Mr^2 - \tilde{L}^2 r + 3M\tilde{L}^2)$$

$$() \text{の中の判別式} = \tilde{L}^2 (\tilde{L}^2 - 12M^2)$$

(a) $\tilde{L}^2 > 12M^2 \quad : \quad \frac{dV}{dr} = 0 \text{ は } 2 \text{ 実根をもつ} \rightarrow \left(\frac{r}{M} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tilde{L}}{M} \right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{L}}{M} \right)^2 - 12} \right] \right)$

• $r \rightarrow 0$ で $V \rightarrow -\infty$; $r \rightarrow +\infty$ で $V \rightarrow 1$

• $r = 2M$ で $V = 0$



(運動の様子)

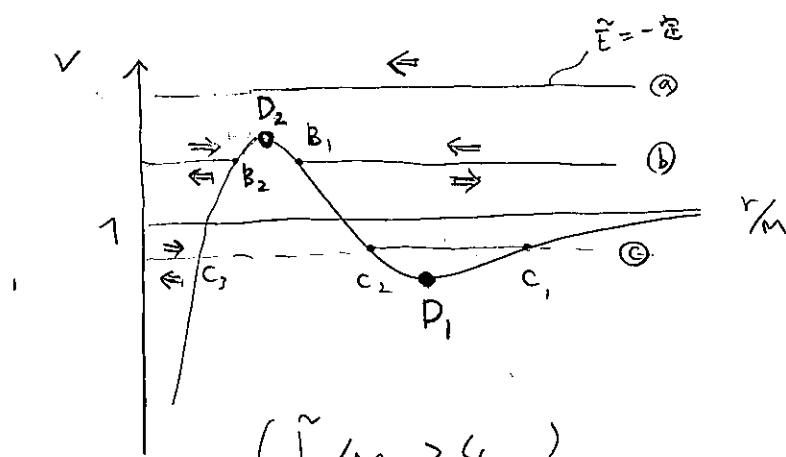
$r \rightarrow \infty$ で $V \rightarrow 1$, $(\frac{dr}{d\tau})^2 \geq 0 \Rightarrow \tilde{E} \geq 1$ ($\frac{E}{m} \geq 1$: 物体の力学的エネルギー下限は $E=m$)

$\Rightarrow r \rightarrow \infty$ で 物体が 到達不可能: $\tilde{E} \geq 1$

但し: $\tilde{E} \geq 1$ であっても $r \rightarrow \infty$ に 到達 できない 場合

$\tilde{E} < 1$ なら、物体は 有限な r に束縛される。

$$\left(\begin{array}{l} \tilde{L}/M \geq 4 \text{ で} \\ \frac{dr}{d\tau} < 0 \text{ の運動} \end{array} \right)$$



D₁: 安定な内軌道

D₂: 不安定な内軌道

(a) ポテンシャルが 行きしなり → 落下しきまゝ停止する

(b) (外側)
 $r \rightarrow \infty \Rightarrow B_1 \Rightarrow r \rightarrow \infty$
Newton の「双曲軌道」

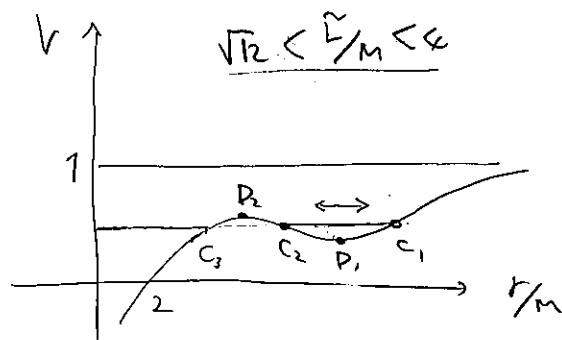
(内側)

B₂ は 稳定で ない

(c) $C_1 \leftrightarrow C_2$

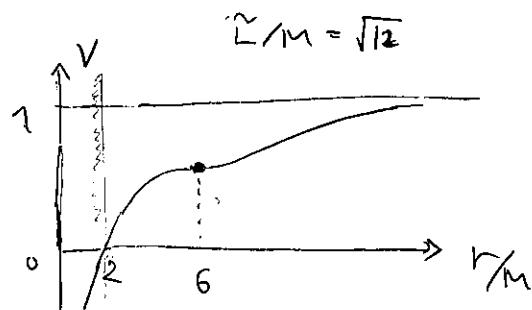
Newton の「捕獲的」

$$\sqrt{12} < \frac{\tilde{L}}{M} < 4 \quad \text{のときは束縛軌道のみ存在}$$



(b) $\tilde{L}^2 = 12 M^2 : \frac{dV}{dr} = 0$ は重根をもつ

$$\frac{dV}{dr} = 0 \text{ の } r = \underline{6M} \text{ は } V \text{ の 变曲点}$$



$r = 6M$ の点では $\frac{dV}{dr} = 0$ なので、内軌道を表す。

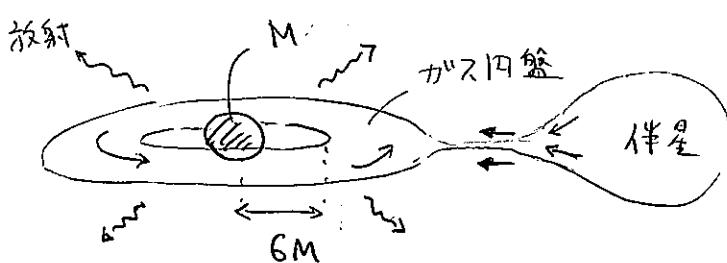
しかし $\frac{d^2V}{dr^2} = 0$ でもあるので、中立安定である

$r = 6M : \text{last stable circular orbit (最終安定内軌道)}$

innermost stable circular orbit (ISCO)

* $\tilde{L}^2 > 12 M^2$ のときの 安定内軌道は $r > 6M$

(c) 重力源天体の周りを回る伴星、ガスなどとは $r < 6M$ の内軌道を描けない



ブラックホールを含むX線連星系

(c) $\tilde{L}^2 < 12 M^2$

安定な束縛軌道は存在しない。

(C) $m=0$ のとき (光子の軌道)

(B) \rightarrow 式(3) より $m \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \rightarrow k^{\mu}$ と置き換えて $m \rightarrow 0$ とおき、
光子のよどみを null 的粒子の運動方程式に代入する (k^{μ} : 光子の4元運動量)

$$(k^r)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \equiv E^2 - V_{ph}(r)$$

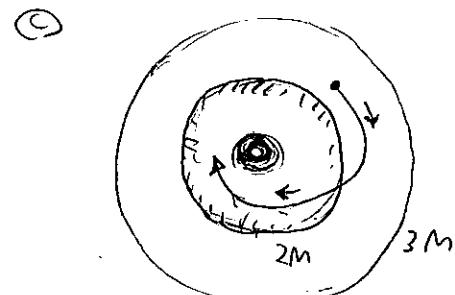
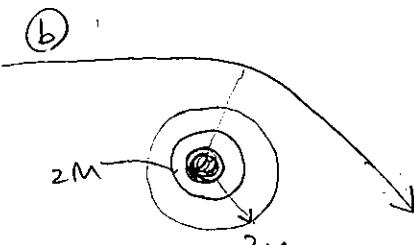
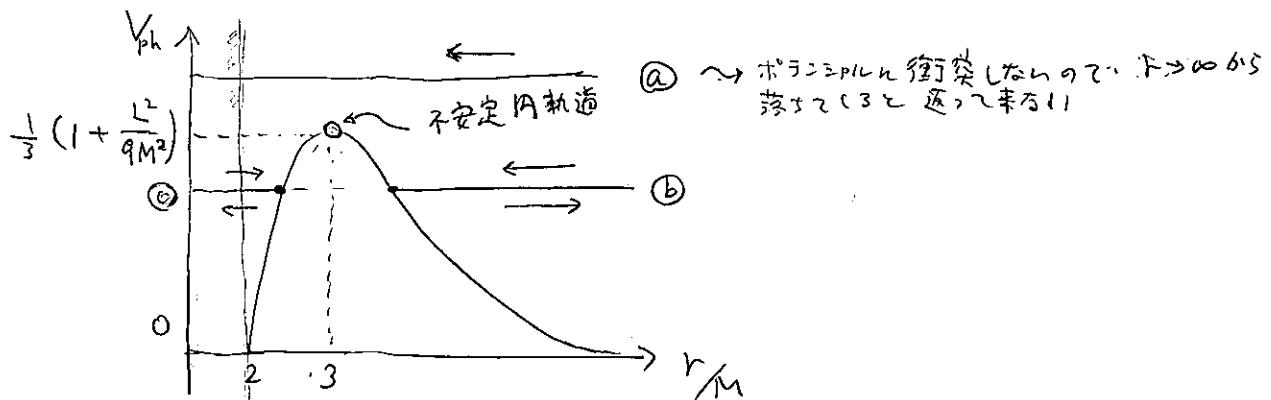
$$(V_{ph}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2})$$

• $V_{ph}(r) \rightarrow$ 振舞

$$\cdot r \rightarrow \infty \rightarrow V_{ph} \rightarrow 0$$

$$\cdot r = 2M \rightarrow V_{ph} = 0$$

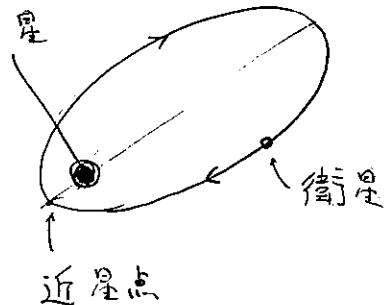
$$\cdot \frac{dV_{ph}}{dr} = - \frac{2L^2}{r^3} \left(1 - \frac{3M}{r}\right)$$



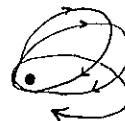
• $r = 3M$: photon orbit

(D) $m \neq 0$ の内軌道でなら東縛運動

Newton 力学では $\phi = -\frac{GM}{r}$ の下での東縛運動は 楕円軌道となる



* 重力ポテンシャルが $-\frac{1}{r}$ 以外の項をもつときは 楕円が開いてる



$$\phi = -\frac{GM}{r} + \underbrace{\frac{C_2}{r^2} + \dots}_{\substack{\text{中心星が回転} \\ \text{などで変形して} \\ \text{いる場合、} \\ \text{環状の惑星の} \\ \text{運動}}}$$

* Newton 力学での固有解は p. 9 参照

Schwarzschild 時空ではどうか？

軌道 $r = r(\varphi)$ と 読める。

$$\text{式 (4)} \quad \tilde{E}^2 = \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$$

$$(\text{比}) \text{ 角運動量の定義: } \tilde{L} = r^2 \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (6)$$

$$\therefore \frac{dh}{d\tau} = \frac{dh}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi}$$

$$\therefore \tilde{E}^2 = \left(\frac{\tilde{L}}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{\tilde{L}^2} r^4 - \frac{1}{\tilde{L}^2} r^4 + \frac{2M}{\tilde{L}^2} r^3 - r^2 + 2Mr \quad (7)$$

$$\therefore u = \frac{r^2}{Mr} \quad \text{と導入すると} \quad (r = r(u))$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -\frac{\tilde{L}^2}{M} \cdot \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}$$

これを (7) に代入して 整理

$$\underbrace{\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2}_{\text{定数}} = \frac{\tilde{E}^2 \tilde{L}^2}{M^2} - \frac{\tilde{L}^2}{M^2} + 2u - u^2 + \frac{2M^2}{\tilde{L}^2} u^3 \quad (8)$$

1 Newton 重力下の点状重力源についての、テスト粒子の運動の解析解

基礎方程式は

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{r^2} \quad (1)$$

$$r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (2)$$

となる。

2番目の方程式に r を掛けると

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \quad (3)$$

となるので、括弧の中身は定数となる。この定数を ℓ とおく。

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \ell \quad (4)$$

この定数は「単位質量あたりの角運動量」(比角運動量) になっている。

ここで、関数 $u \equiv u = \frac{1}{r}$ と定義すると

$$\frac{d\varphi}{dt} = \ell u^2 \quad (5)$$

である。以下、 u を φ の関数として、基礎方程式の最初のものを u の微分方程式に書き直すことを考える。

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{dt}{d\varphi} \frac{du}{dt} = \left(\frac{du}{dt} \right)^{-1} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} = \frac{1}{\ell u^2} \left(-\frac{du}{r^2} \right) = \frac{1}{\ell u^2} \left(-u^2 \frac{dr}{dt} \right) = -\frac{dr}{\ell} \quad (6)$$

より、

$$\frac{dr}{dt} = -\ell \frac{du}{d\varphi}. \quad (7)$$

これをもう一度 t で微分して

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{d\varphi} \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(-\ell \frac{du}{d\varphi} \right) = \ell u^2 \cdot (-\ell) \frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\ell^2 u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} \quad (8)$$

よって、軌道方向の運動方程式を書き直すと

$$-\ell^2 u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{1}{u} (\ell u^2)^2 = -u^2 \quad (9)$$

これを整理して

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u + \frac{GM}{\ell^2} \quad (10)$$

となる。式(10)は $Y = u - \frac{GM}{\ell^2}$ という関数を導入すると

$$\frac{d^2Y}{d\varphi^2} = -Y \quad (11)$$

という簡単な方程式になる。これは单振動の微分方程式であるので、その一般解は

と書ける。ここで A, α は積分定数である。このとき

$$Y = A \cos(\varphi + \alpha) \quad (12)$$

$$u = \frac{GM}{\ell^2} + A \cos(\varphi + \alpha) \quad (13)$$

である。この式を r についての式に直す前に積分定数を変換して $\varepsilon = \frac{\ell^2}{GM} A$ となる定数 ε を A の代わりに導入しておく。このとき

$$r(\varphi) = \frac{\ell^2}{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \alpha)} \quad (14)$$

が、動径 r を φ の関数と見たときの軌道運動の解である。

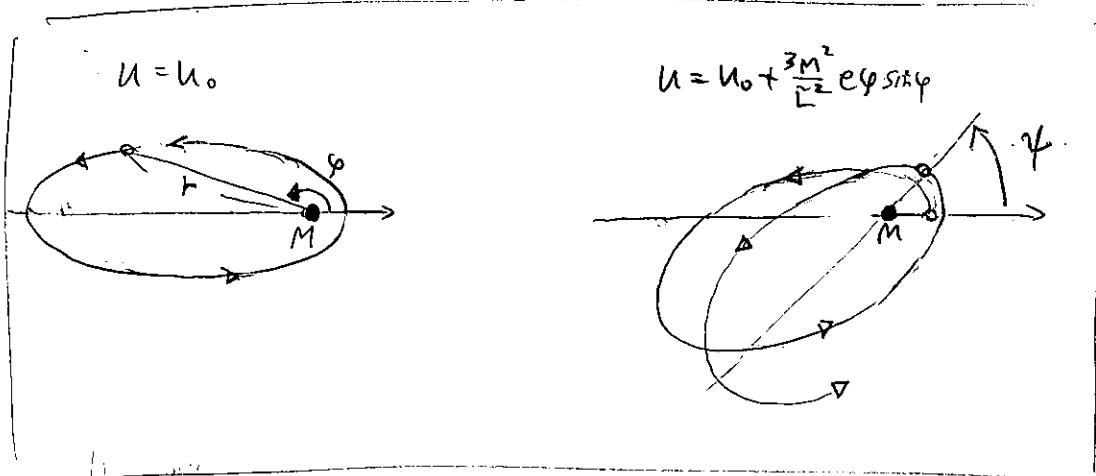
これは原点を焦点とする離心率 ε の二次曲線 ($0 \leq \varepsilon < 1$ のときは楕円 ($\varepsilon = 1$ のときは円軌道)、 $\varepsilon = 1$ のとき放物線、 $\varepsilon > 1$ のときは双曲線) である。ニュートンの重力で質点を重力源とする場合のテスト粒子の運動は重力筋の質点を焦点に置いたときの二次曲線を描くことが分かった。

(1) の 解は

$$u_1 = \frac{3M^2}{L^2} \left(\left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + e \varphi \sin \varphi - \frac{e^2}{6} \cos 2\varphi \right) \quad (12)$$

(12) の 第1項は定数、第3項は φ が $0 \rightarrow \pi$ の変化すると元に戻る。
 対して、第2項は 永年の変化の項となる。(13)
 いま、この項によると物体の軌道が「長時間」でどう変化するか見よう。

$$\bar{u} = u_0 + \frac{3M^2}{L^2} e \varphi \sin \varphi \quad (13)$$



$$(13) の 第2項より u_0 \rightarrow \bar{u} = 1 + e \cos [(-\varepsilon)\varphi] \quad (1+e \cos \varphi) \quad (\varepsilon \ll 1)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 1 + e \cos \varphi + \frac{d}{d\varepsilon} [e \cos (-\varepsilon)\varphi] \Big|_{\varepsilon=0} \times \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= 1 + e \cos \varphi + \varepsilon \cdot e \varphi \sin \varphi + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (14)$$

(14) と (13) を比較。

$$\varepsilon = \frac{3M^2}{L^2} \quad (15)$$

すなはち $\varphi : [0, 2\pi]$ のとき $(-\varepsilon)\varphi : [0, 2\pi(1-\varepsilon)]$

\bar{u} が一周期変化する（物体が近星点から次の近星点まで動く）

したがって $2\pi\varepsilon \equiv \varphi$ で ε 余計な運動が必要がある

$$\varphi = \frac{6\pi M^2}{L^2} \quad (\text{近星点運動}) \quad (16)$$

(8) 万有引力の微分

$$2 \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2} = 2 \frac{du}{d\varphi} - 2u \cdot \frac{du}{d\varphi} + \frac{6M^2}{L^2} u^2 \frac{du}{d\varphi}$$

$$\frac{du}{d\varphi} \neq 0 \text{ のとき } (\text{円軌道の場合には除く}; \frac{d}{d\varphi}(\frac{l}{r}) \neq 0)$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 1 - u + \frac{3M^2}{L^2} u^2 \quad (9)$$

(*) Newton力学との対応式は

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 1 - u \quad \rightarrow \text{单振動}$$

(1) 式(9)を第3項が第2項より十分小さい場合を考える。

(*) $\frac{3M^2}{L^2} u^2 \ll u \rightarrow \frac{3M^2}{L^2} u \ll 1$

$$\therefore \frac{3M^2}{L^2} \frac{L^2}{Mr} \ll 1 \rightarrow \underline{\underline{3M \ll r}}$$

$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 1 - u$ が満たされるとし、第3項が加わることで運動は

u_0 が定められるとして $u = u_0 + u_1$ と書く ($|u_1| \ll |u_0|$)

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(u_0 + u_1) = 1 + (u_0 + u_1) + \frac{3M^2}{L^2}(u_0 + u_1)^2$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2} u_1 = 1 - u_1 + \frac{3M^2}{L^2}(u_0^2 + 2u_0 u_1 + u_1^2)$$

第3項の最低次をとると

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u_1 = -u_1 + \frac{3M^2}{L^2} u_0^2 \quad (10)$$

u_0, φ の位相と適切にとると

$$u_0 = 1 + e \cos \varphi \quad (\varphi = 0 \text{ で 通過点})$$

e : Newton力学の離心率 ($0 < e < 1$)

これを式(10)に代入

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u_1 = -u_1 + \frac{3M^2}{L^2} (1 + e \cos \varphi)^2 \quad (11)$$

(16) SI 単位系に展すと

$$\psi = \frac{6\pi \left(\frac{GM}{c^2}\right) c^2}{\ell^2} = \frac{6\pi GM^2}{c^2 \ell^2}$$

ℓ : 比角運動量

Newton力学での軌道では

$$\ell^2 = GMa(1-e^2)$$

a : 軌道長半径

である。重力が弱い場合にこれを使うと

$$\psi = \frac{6\pi GM}{c^2 a (1-e^2)}$$

○ 水星の近日点移動による一般相対論効果

$$M = M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$a = 5.79 \times 10^{10} \text{ m}$$

$$e = 0.2056$$

$$\rightarrow \psi = 5.0 \times 10^{-7} \text{ rad} \quad (\text{-公転あたり})$$

$$\rightarrow \psi = 43''/\text{century}$$

○ 連星ハルター PSR1913 + 16

$$M \sim 1.4 M_{\odot}, R \sim 10 \text{ km} \quad \text{中性子星連星}$$

$$a = 2 \times 10^9 \text{ m}, e = 0.6$$

$$\psi = 4.2^\circ/\text{yr}$$

$530''$: 他の惑星の運動

$43''$: GR

$0.025''$: 太陽の変形

Mercury

$OJ 287$	$39^\circ/\text{orbit}$
$M_1 = 2 \times 10^{10} M_{\odot}$	$M_2 = 1 \times 10^8 M_{\odot}$

(E) "重力レンズ"

§3のP. 13で見た、重力場中の光線の弯曲を詳しく調べる。

(C) "見えよし, null的粒子(?)"

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}, \\ r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = L \end{array} \right. , \quad (E: エネルギー(保存量))$$

$\lambda: \text{affine parameter}$

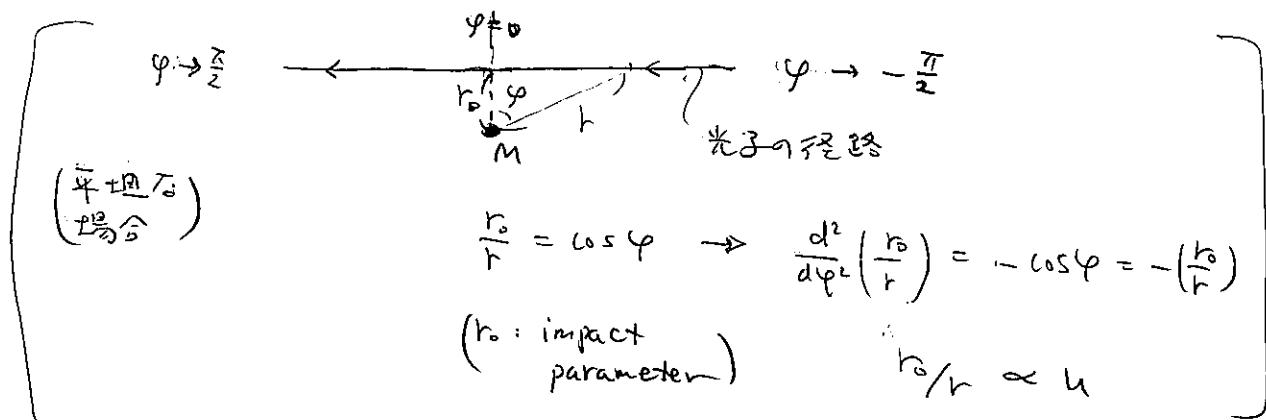
満たす軌道を運動する。

(D) その議論と同様に $u \equiv \frac{L^2}{Mr}$ を導入すると

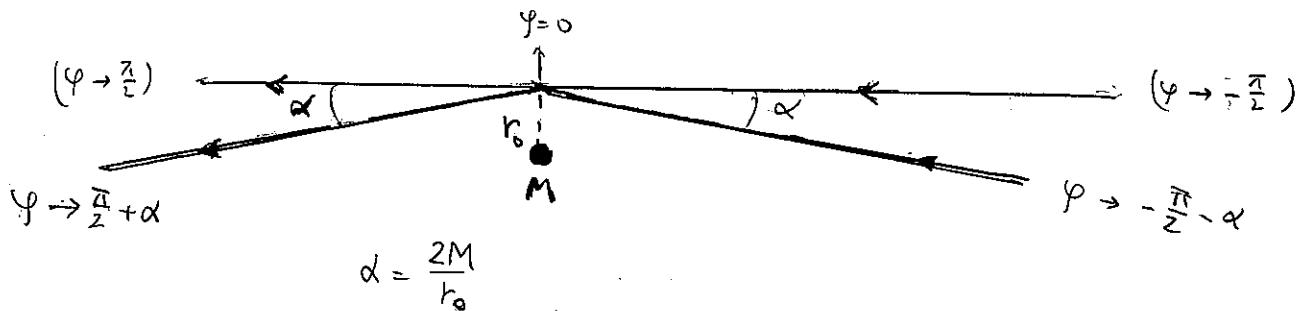
(9) 式に対応して

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u + \frac{3M^2}{L^2} u^2 \quad (17)$$

が得られる。 (17) の右边第2項が無い場合は平坦な時空における光の運動を表すこと应注意。



(17) の右边第2項が小さいと見なせる場合 ($r_0 \gg M$) を考えよ。



$$(17) \therefore \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{L^2}{Mr} \right) = - \frac{L^2}{M} \cdot \frac{1}{r} + \frac{3M^2}{L^2} \left(\frac{L^2}{M} \frac{1}{r} \right)^2$$

$$\therefore \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{r_0}{r} \right) = - \left(\frac{r_0}{r} \right) + \frac{3M}{r_0} \cdot \left(\frac{1}{r} \right)$$

右辺第2項が無い時の解 $\frac{r_0}{r} = \cos \varphi$ を右辺第2項に代入して
近似解を求める (逐次近似法)
(\tilde{r})

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{r_0}{\tilde{r}} \right) = - \frac{r_0}{\tilde{r}^2} + \frac{3M}{r_0} \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{r_0}{\tilde{r}^2} = \underbrace{\cos \varphi}_{\substack{\text{近似} \\ 0\text{次}}} + \frac{2M}{r_0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right)$$

入射方向で $\tilde{r} \rightarrow \infty$ とすると $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$ 且 $|\cos \varphi| \ll 1 \rightarrow \cos^2 \varphi$ は無視

$$\rightarrow \cos \left(-\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{2M}{r_0} = 0$$

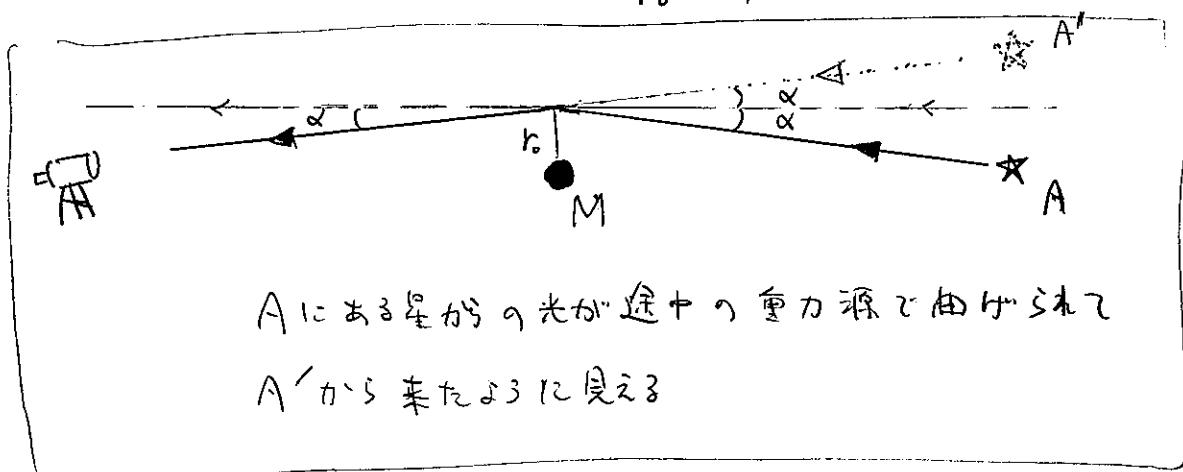
$$\rightarrow -\sin \alpha + \frac{2M}{r_0} = 0 \xrightarrow{\alpha \ll 1} \alpha = \frac{2M}{r_0}$$

遠ざかる方向で計算.

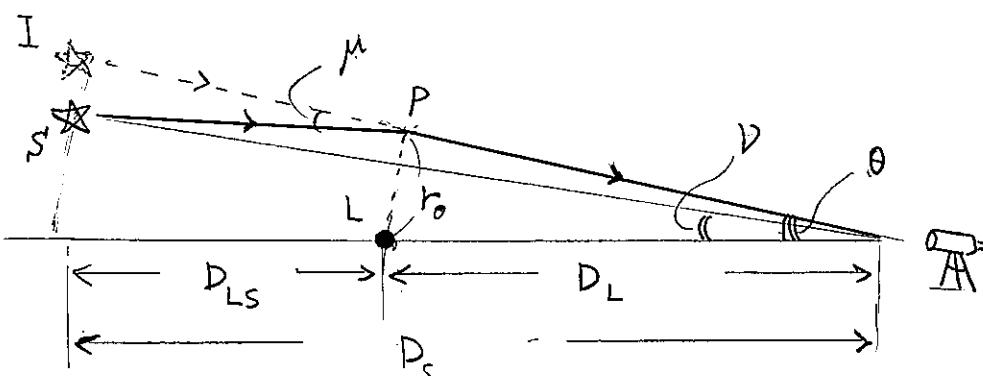
$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \frac{2M}{r_0} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{2M}{r_0}$$

光の経路の弯曲は

$$2\alpha = \frac{4M}{r_0} //$$



④ レンズ方程式



L: 重力レンズ"の源

S: 遠方の天体

I: 重力レンズによる
Sの像

レンズ方程式

$$\theta \cdot D_s = v D_s + \mu D_{Ls}$$

$$\mu = \frac{4M}{r_0} \quad (\text{2つのC})$$

$$\theta = v + \frac{4MD_{Ls}}{r_0 \cdot D_s}$$

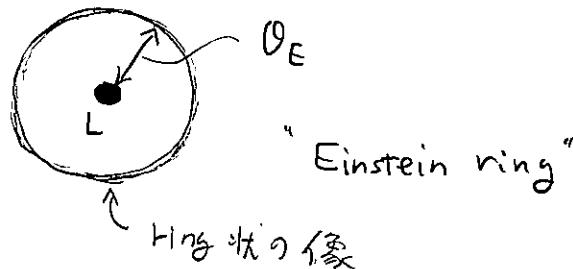
$$\theta \ll 1, v \ll 1 \quad \text{のとき} \quad r_0 \approx \theta \cdot D_s$$

$$\therefore \theta = v + \frac{\theta_E^2}{\theta} \quad : \quad \theta_E^2 \equiv 4M \cdot \frac{D_{sL}}{D_s \cdot D_L}$$

(Einstein 角)

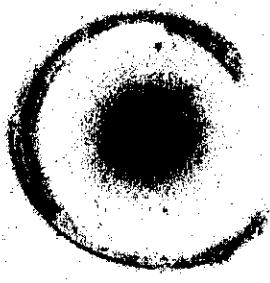
特に $v=0$ とすると (L と S の方向が視線の方向)

$$\theta = \theta_E$$

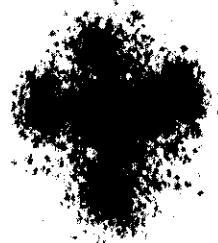


Hubble Space Telescopeによる重力レンズ観測の例

Einstein ring “Horseshoe”



Einstein cross



4-3 事象の地平面 (event horizon)

(1) の 計量は $r \rightarrow 2M$ で特異的 (singular) を見る。

$$\textcircled{1} \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \rightarrow +\infty \quad (r \rightarrow 2M+0)$$

[座標基底ベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ の ハム]

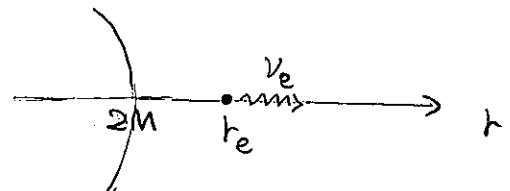
$$g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = g_{rr} \rightarrow +\infty ?$$

$$\textcircled{2} \quad g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \rightarrow -0 \quad (r \rightarrow 2M+0)$$

[$r = r_e$ の点に静止した光源から、

光 (振動数 ν_e)

↓ 光の測地線
分、 τ は
保存



$$-g_{tt}(r_e)(h\nu_e) = -g_{tt}(r=+\infty)(h\nu_\infty)$$

↑
(無限遠方
(1,3次元測地)

$$\nu_\infty = \left(1 - \frac{2M}{r_e}\right) \nu_e$$

$$r_e \rightarrow 2M \text{ とき } \nu_\infty \rightarrow 0$$

(無限大の赤方偏移
or
光は到達しない)

$$\textcircled{3} \quad r < 2M$$

$$g_{tt} > 0, \quad g_{rr} < 0$$

\Rightarrow 時間的ベクトル ($\lambda \nu \lambda < 0$)

空間的ベクトル ($\lambda \nu \lambda > 0$)

かわる?

すると、 $r=2M$ の物理は破綻しているのか？

\Rightarrow NO!

- Schwarzschild 座標は $r \leq 2M$ の時空領域を記述するのに不適当な形 (cf. 地球表面の Mercator 図法は両極を正しく表現せない)

この後に見るよろしく $r \leq 2M$ の領域を記述できる適切な座標が存在する。

- 「曲率」は $r=2M$ で発散しない
 → 時空の曲がり方は特異的でない

ex.) Schwarzschild 座標で動径方向の時間的測地線を求める。

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} = 0, \frac{dr}{dt} = 0 \right)$$

$$-1 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \quad (18)$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{dr} = \tilde{E} \rightarrow (r \rightarrow \infty \text{ かつ } \frac{dt}{dr} = 0 \text{ が出来たとき}) \rightarrow \tilde{E} = 1 \text{ (保存)}$$

$$\therefore \frac{dt}{dr} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (19)$$

$$-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \quad \leftarrow \left(\frac{dt}{dr} \text{ であることに注意}\right)$$

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

座標のうちの 1 つ (たとえば t)
 重力加速度の値 $\frac{dr}{dt}$ は $\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2M}{r}} \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$
 重力加速度の値 $\frac{dr}{dt}$ は $\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2M}{r}} \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$
 重力加速度の値 $\frac{dr}{dt}$ は $\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2M}{r}} \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2M}{r}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$\rightarrow \frac{t}{2M} = C - \frac{2}{3} \left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{3}{2}} - 2 \sqrt{\frac{r}{2M}} + \ln \frac{\sqrt{\frac{r}{2M} + 1}}{\sqrt{\frac{r}{2M} - 1}}$$

$r \rightarrow 2M$ のとき、右辺第 4 項が dominant

$$\Rightarrow \frac{t}{2M} \propto -\ln \left(\sqrt{\frac{r}{2M}} - 1\right) \rightarrow r - 2M \propto \exp \left(-\frac{t}{2M}\right) \quad (20)$$

(20) 式は、座標時間 $t \rightarrow \infty$ といふも $r = 2M \rightarrow +0$ となるだけであることを示す

\Rightarrow 自由落下する粒子は $r = 2M$ 近傍で停止する？

しかし 粒子の固有時間で運動を見ると。

(18) & (19)

$$\Rightarrow -1 = -(1 - \frac{2M}{r})^{-1} + (1 - \frac{2M}{r})^{-1} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{r}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} = C - \frac{3}{2} \left(\frac{t}{2M} \right)$$

有限の t で $r \rightarrow 0$ ($< 2M$) となる

座標時間 t は $r \leq 2M$ の範囲で粒子の運動を調べるのに適さない

4-3-1 Kruskal-Szekeres 座標

$r \leq 2M$ の領域を調べるのに都合の良い座標を導入

(Schwarzschild: (t, r, θ, φ))

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r}) dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

(Kruskal-Szekeres: (T, R, θ, φ))

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (dT^2 - dR^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (21)$$

$$\therefore r = r(T, R)$$

(座標変換)

$$R = \begin{cases} (\frac{r}{2M} - 1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \cosh \frac{T}{4M} & (r \geq 2M) \\ (1 - \frac{r}{2M})^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \sinh \frac{T}{4M} & (r < 2M) \end{cases} \quad (22)$$

$$T = \begin{cases} (\frac{r}{2M} - 1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \sinh \frac{T}{4M} & (r \geq 2M) \\ (1 - \frac{r}{2M})^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \cosh \frac{T}{4M} & (r < 2M) \end{cases}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

→ check

19

$$(r \geq 2M)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}} \quad (23) \\ \end{array} \right.$$

$$T/R = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (24)$$

$$(23): \quad 2R dR - 2T dT = \frac{r}{4M^2} e^{\frac{r}{2M}} dr$$

$$\therefore dr = \frac{8M^2}{r} e^{-\frac{r}{4M}} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} (\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) dR - \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) dT) \quad (25)$$

$$(24): \quad \frac{1}{R} dT - \frac{T}{R^2} dR = \frac{1}{4M} \frac{dt}{\cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right)} \quad \leftarrow (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\therefore dt = 4M \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \cdot (dT - \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) dR) \quad (26)$$

→ 3x.

$$\begin{aligned} -(1 - \frac{2M}{r}) dt^2 + (1 - \frac{2M}{r}) dr^2 &= -\frac{\left(\frac{r}{2M} - 1\right)}{\left(\frac{r}{2M}\right)} dt^2 + \frac{\left(\frac{r}{2M}\right)}{\left(\frac{r}{2M} - 1\right)} dr^2 \\ &= -\frac{\left(\frac{r}{2M} - 1\right)}{\left(\frac{r}{2M}\right)} \cdot 16M^2 \cdot \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{-1} e^{-\frac{r}{2M}} \cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right) \cdot (dT - \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) dR)^2 \\ &\quad + \frac{\left(\frac{r}{2M}\right)}{\left(\frac{r}{2M} - 1\right)} \cdot \frac{64M^4}{r^2} e^{-\frac{r}{2M}} \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \cdot (\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) dR - \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) dT)^2 \\ &= -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} \cdot (dT^2 - dR^2) \quad // \end{aligned}$$

$$\left(\because \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \right)$$

$r < 2M \rightarrow$ 無理な解

(21) の 計量は $\bar{g}(T, R) = 2M$ で "特異的" はない

発散は $r \rightarrow 0$ の付 (これが真の時空特異点)

Kruskal - Szekeres 座標の特徴

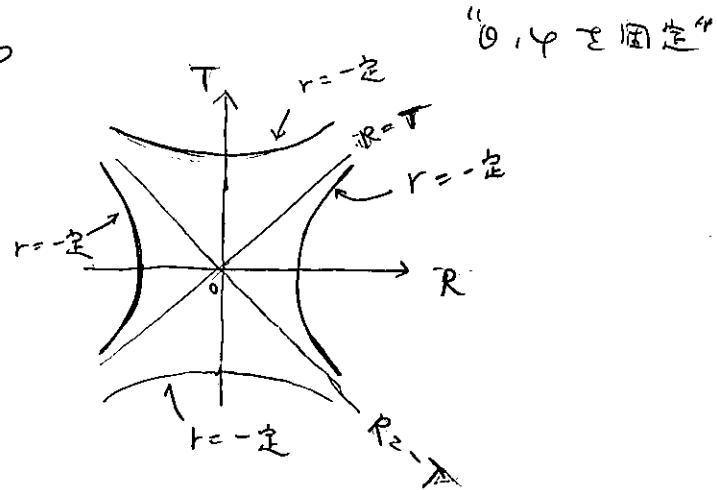
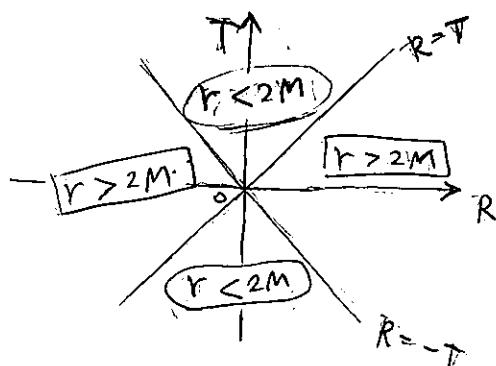
- $(\theta, \psi), r_2 > r_1 r_2$ Schwarzschild と同じ
- $\sqrt{\frac{R}{2M}}$ は $r \geq 2M$ で $(-, +, +, +)$
- T : 時間的な座標
- R : "動径" 座標

- $t = \text{const.}$ とすと。

$$R^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{R}{2M}} = \text{const.}$$

$$\frac{r}{2M} > 1 \Rightarrow R^2 - T^2 > 0$$

$$\frac{r}{2M} < 1 \Rightarrow R^2 - T^2 < 0$$



- $t = \text{const.}$ とすと。

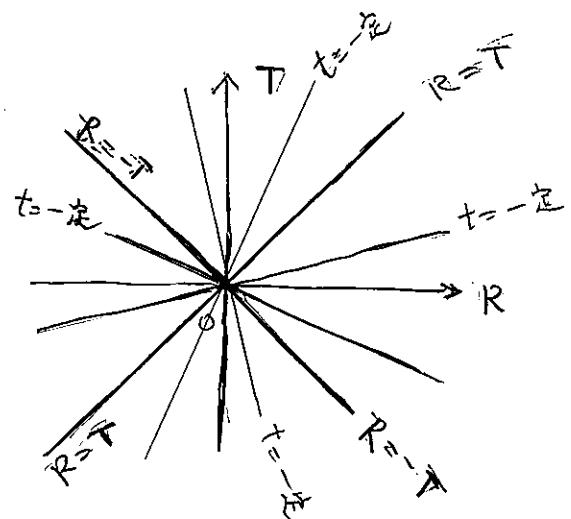
$$T/R = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \text{const.}$$

$$\begin{cases} t > 0 \Rightarrow T/R > 0 \\ t < 0 \Rightarrow T/R < 0 \end{cases}$$

また、

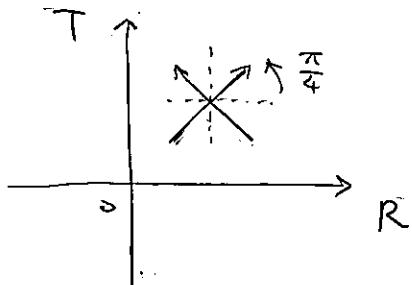
$$-1 \leq \frac{T}{R} \leq 1 \quad (r > 2M)$$

$$-1 \leq \frac{R}{T} \leq 1 \quad (r < 2M)$$



- 動徑方向の null 測地線
 $(d\theta, d\varphi = 0)$

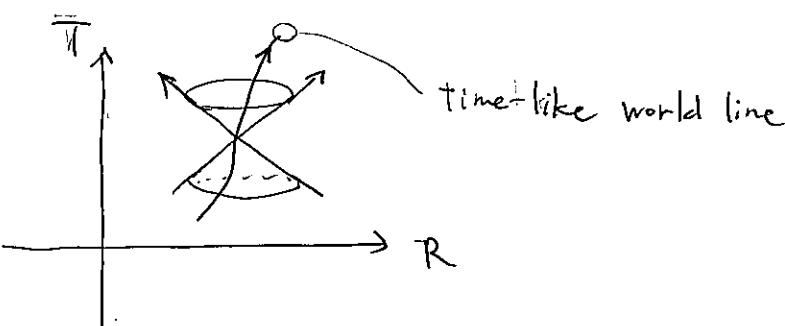
$$ds^2 = 0 \Rightarrow -dt^2 + dr^2 = 0 \quad \therefore dr = \pm dt$$



光の錐は T, R 方向に対して
 $\frac{\pi}{4}$ の角度をもつ。

(光の伝播と様子が Minkowski 時空)
(光の世界線 ($-dt^2 + dr^2 = 0$))

時間的測地線 (motion の物体の world line) は光の錐の内部



特例. $r = 2M$ は $R = \pm T$ となる null 測地線に相当

$r = 2M$: null surface (null 面)

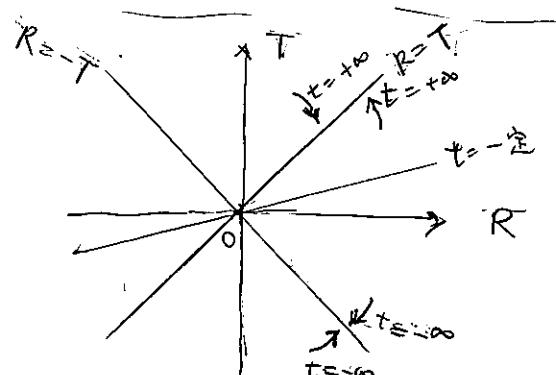
(※ $r > 2M$ と $r < 2M$ の場合、"r = r₀" は時間的各 world line E 沿い \rightarrow "time-like" surface)

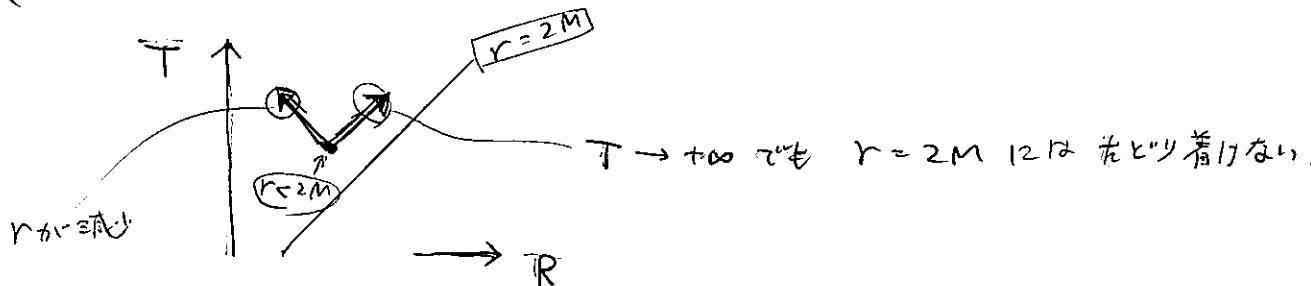
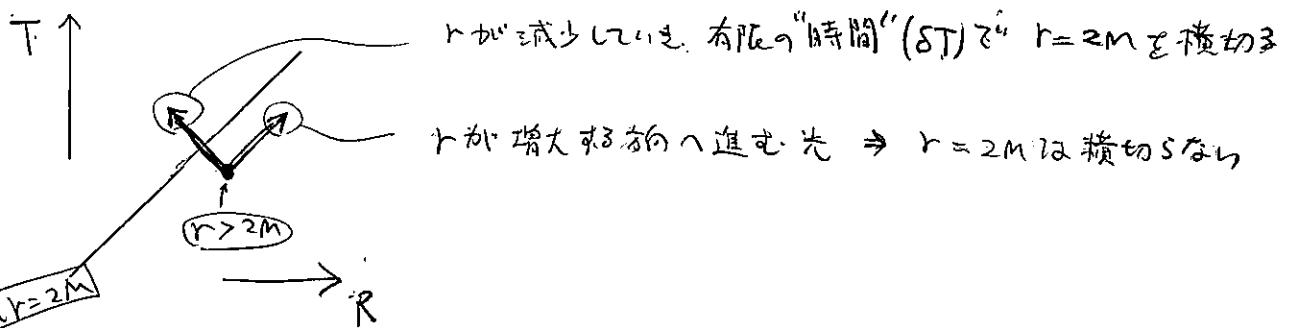
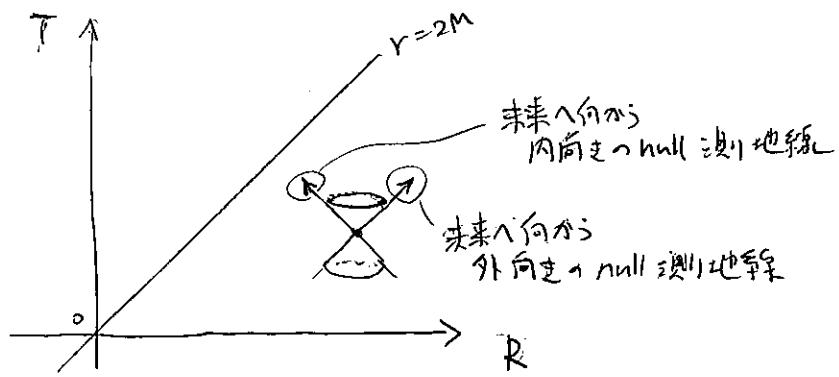
② $r \rightarrow 2M$ のとき

$$\frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) \rightarrow \pm 1 \quad (r \rightarrow 2M \pm 0)$$

$$\frac{R}{T} = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) \rightarrow \pm 1 \quad (r \rightarrow 2M \pm 0)$$

$\Rightarrow t \rightarrow +\infty$ or $t \rightarrow -\infty$





$r=2M$ の面は、
 [外から落ち込もうと脱出できない
 $r < 2M$ の内部から $r > 2M$ の外部へ
 一切の物質・情報の伝達が不可能 (一方通行面)]

$r=2M$ の面 : 事象の地平面 (event horizon)

event horizon が囲まれた領域 ⇒ black hole

(Schwarzschild BH)

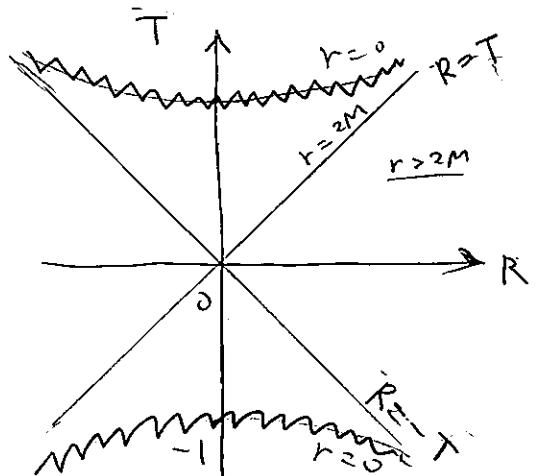
• $r = 0$

$r \rightarrow 0$ 時空の物理量(曲率)は発散する

⇒ Einstein の 重力理論は $r \rightarrow 0$ で破綻

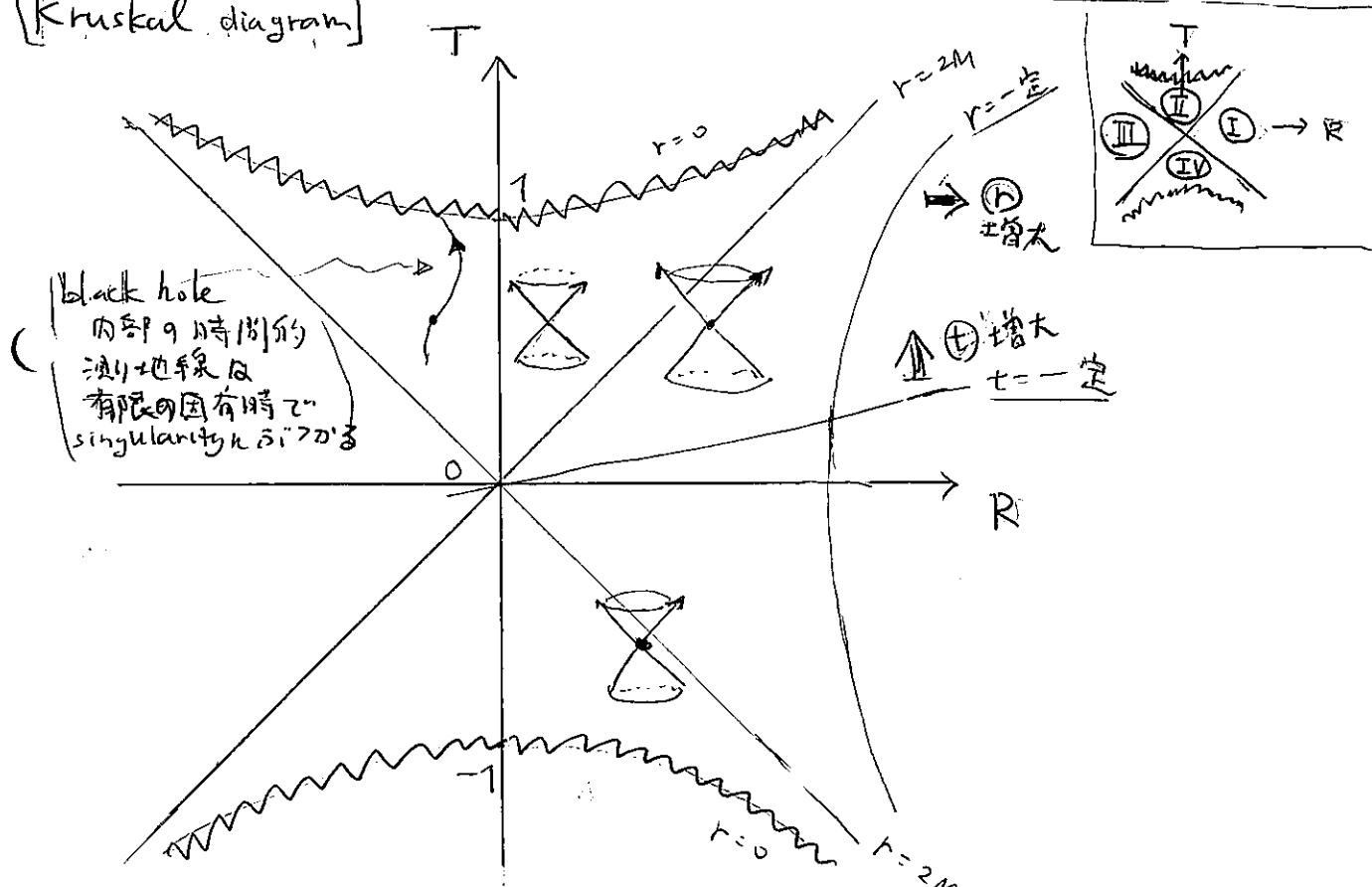
$r = 0$ で時空の特異点 (spacetime singularity) となる

$r = 0 \Rightarrow R^2 - T^2 = -1$ (直角双曲線)



* $r = 0$ は singularity は $r > 2M$
では我々がさは見えない。
⇒ $r > 2M$ は限界。singularity は
我々に全く影響を及ぼさない
一般の singularity を持つ時空に対して成立?
宇宙検閲仮定 (cosmic censorship conjecture)
Penrose (1969)

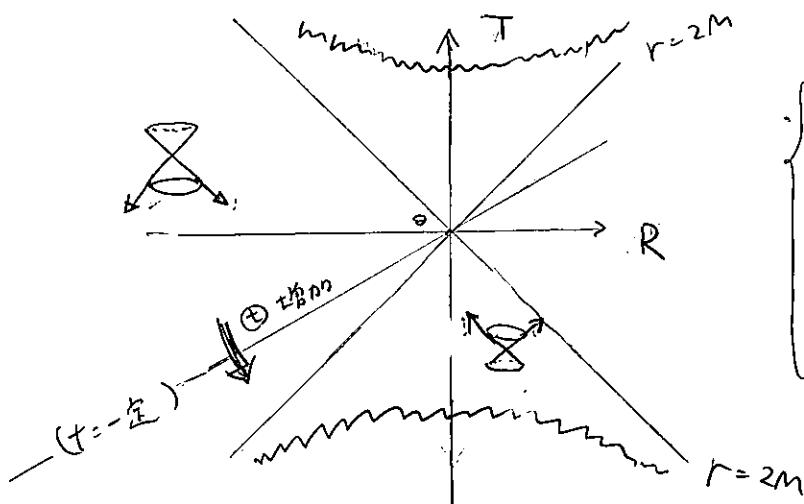
[Kruskal diagram]



①：我々のいる black hole の外の宇宙

②：black hole の内部

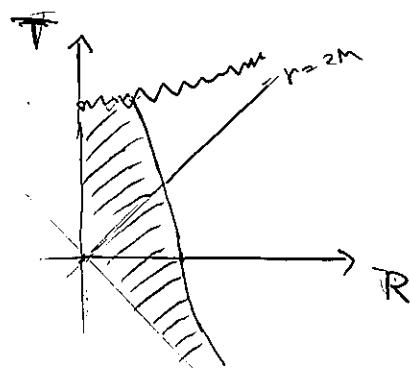
④, ⑤ は 何か?



③, ⑤ とその境界 $r=2M$
 \Rightarrow ①, ② とその境界と同じ構造
 \Downarrow
 ③: 我々の t のとは別の宇宙

④ と ① の境界は $r=2M$ が一方通行面
 (我々の宇宙から ④ へ入れない)
 ④ : "white hole"

* ③, ⑤ の領域は 時空が ^{真空} 静的 ($t = -\infty$ から ∞ まで変化しない)
 という高度な対称性の仮定が成立している
 \Rightarrow ある時刻に生成した black hole 時空には ③, ⑤ は存在しない



"重力崩壊" は black hole の生成
 余分源の部分は 崩壊する星 \rightarrow 真空である

*** $r=0$ a singularity の問題

古典的一般相対論では 解決できな

重力の量子論が必要 (未解決)

$$\frac{Gm}{c^2} \sim \frac{\hbar}{mc} \Rightarrow m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (\text{Planck 質量})$$

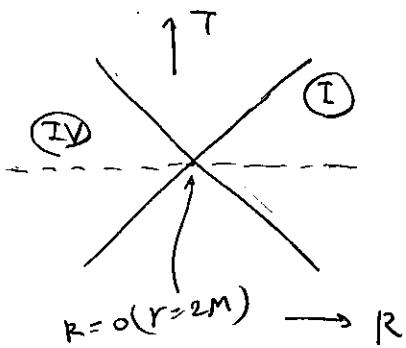
$$l_{pl} = \frac{G m_{pl}}{c^2} \sim \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad (\text{Planck 長さ})$$

$r \sim l_{pl}$. これは 量子効果が支配的 $\Rightarrow r=0$ は singularity ではなく

(?)

Wormhole

① と ④ の 2つの宇宙が接する $T=R=0$ の面へ



$T=0$ の面 (spacelike) θ の面 $\theta = \frac{\pi}{2}$

を参考

$$dT = 0, d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= + \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \\ &= \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\varphi^2 \end{aligned}$$

\tilde{ds}^2 は、3次元 Euclid 空間 (座標 (r, φ, z)) 内の曲面上の計量とみなすことができる。
("埋め込み" (embedding))

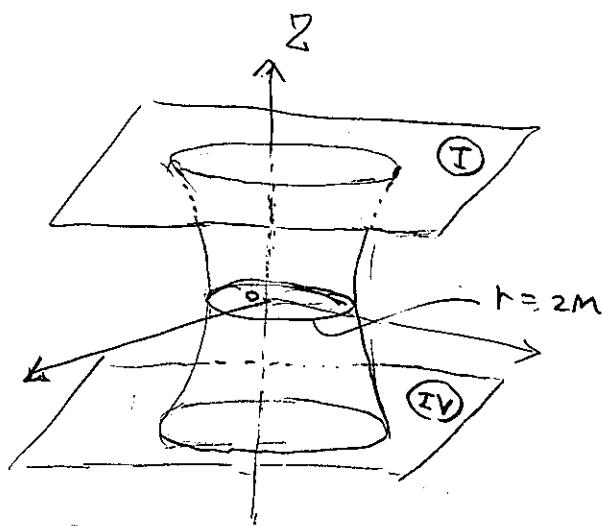
曲面を $Z = Z(r)$ (φ の向かは回転対称) とす。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\varphi^2$$

$$\Rightarrow dr^2 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2 dr^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$1 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \quad \therefore \frac{dZ}{dr} = \pm \sqrt{\frac{2M}{r-2M}}$$

$$Z = \pm \sqrt{2M(r-2M)} \quad (r=2M, z=0 \text{ とき})$$



① と ④ を結ぶ wormhole

Einstein-Rosen の "橋"

4-3-2

(共形図 (conformal diagram))

(Carter-Penrose diagram)

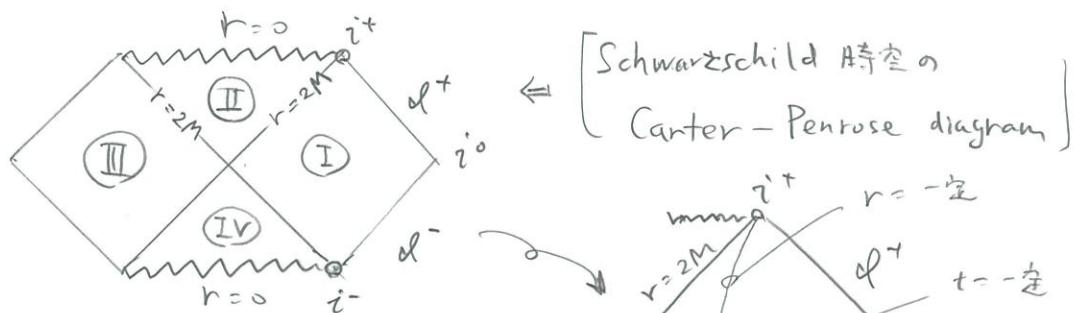
Kruskal diagram を書き換えて、時空構造をよりコンパクトに表現したい。

Kruskal - Szekeres 座標 (τ, ν) を変化変換

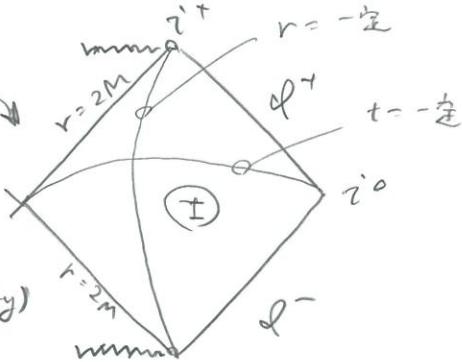
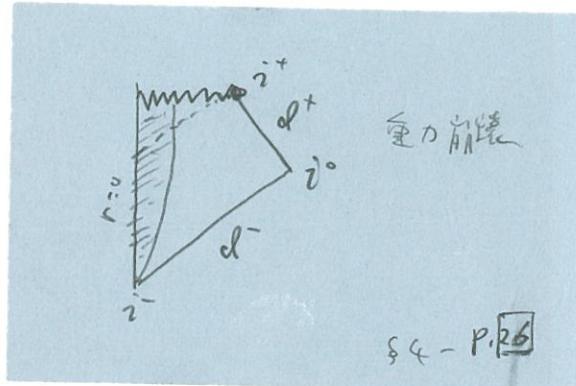
$$(T, R) \longrightarrow (u, v)$$

$$\begin{cases} T+R = \tan \left[\frac{1}{2}(u+v) \right] \\ T-R = \tan \left[\frac{1}{2}(u-v) \right] \end{cases} \quad (27)$$

- 光円錐の傾きは $\pm \frac{\pi}{4}$ と不变
- 無限遠が有限の座標で表現される



'無限遠' (infinities)

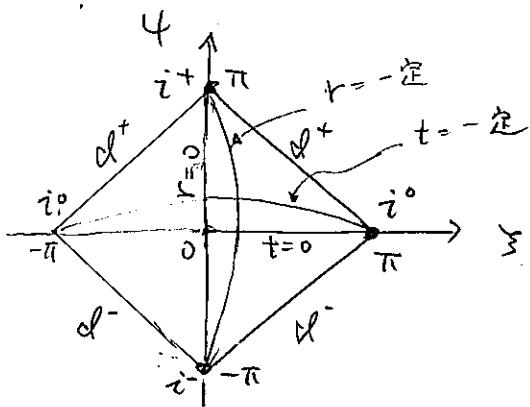
 i^+ : 無限遠の未来 (future infinity) i^- : " 過去 (past infinity) i° : 空間的無限遠 (spatial infinity) d^+ : null 線ルビン, 無限遠の未来 (future null infinity) d^- : null 線ルビン, 無限遠の過去 (past null infinity)

cf. Minkowski 時空の Carter - Penrose diagram

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ t+r &\equiv \tan \frac{1}{2}(4+\xi) \quad (t, r) \rightarrow (\eta, \xi) \\ t-r &\equiv \tan \frac{1}{2}(4-\xi) \\ dt+dr &= \frac{1}{2}(d\eta + d\xi) \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}(4+\xi)} \\ dt-dr &= \frac{1}{2}(d\eta - d\xi) \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}(4-\xi)} \\ &\left[-(dt+dr) \cdot (dt-dr) \right] \end{aligned}$$

$$ds^2 = -\frac{d\eta^2 - d\xi^2}{4\cos^2 \frac{1}{2}(4+\xi)\cos^2 \frac{1}{2}(4-\xi)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

η : 時間的座標



Minkowski 時空の Carter - Penrose diagram

Hawking, S.W., Ellis, G.F.R. : The large scale structure of spacetime, Cambridge

Frolov, V.P., Zelnikov, A. : Introduction to Black Hole Physics, Oxford

Wald, R.M. : General Relativity, University of Chicago

Hawking, S.W., Penrose, R. : The Nature of Space and Time, Princeton

佐藤文隆, R.IV-2 : ハーリングホーク - 一般相対論と星の終末, 菊書房

江里口 良治 : 時空のゆがみとハーリングホーク, 講談社

4-3-3 Wormhole & タイムマシン

M.S. Morris, K.S. Thorne, U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett., 61, 1446 (1988)

(M.S. Morris, K.S. Thorne, Am. J. Phys., 56, 395 (1988))

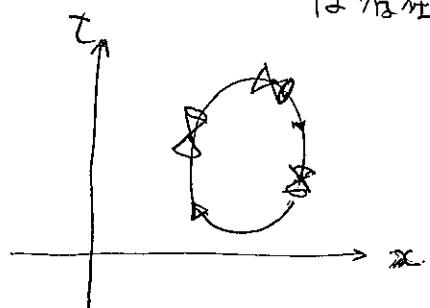
一般相対論における、過去に戻る「タイムマシン」

時間的な世界線を「未来」へ向かって進むと

自己自身の過去の事象へと戻るという可能性

閉じた時間的曲線 (closed time-like curve, CTC)

は存在できますか？



• Thorne 達のアティーナ

wormhole × 一端で光速に近い速さで往復させよ。

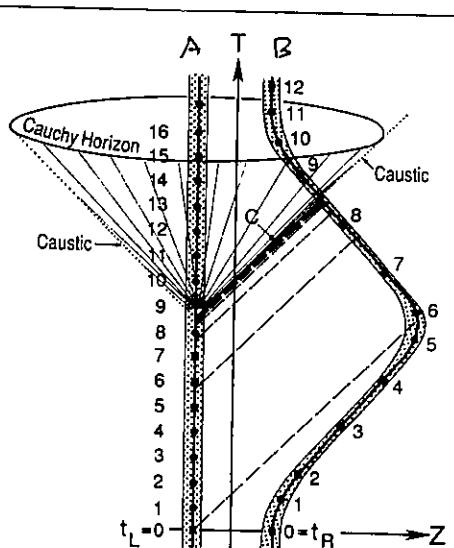


FIG. 2. Spacetime diagram for conversion of a wormhole into a time machine.

Morris, Thorne, Yurtsever



• B が A の過去となり、B と同時な
事象は A の過去となり、
↓

時刻 t_1, t_2 A 近傍の観測者が B に入ると。
A の S' 出たときの時刻 t_2 は
 $t_2 < t_1$

>> Intermezzo <<

② 「重力」とは何か?

3次元地図 = 重力場中、自由粒子の運動

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0$$

↑ 重力の効果を含む。

$$\bullet ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu ; \gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad x^\mu : \text{cartesian} \\ (t, x, y, z) \rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0 \Rightarrow \text{重力なし, 時空}$$

Q: cartesian 空間の座標系で Minkowski 2度使った?

$$(t, x, y, z) \rightarrow (t, R, \varphi, z)$$

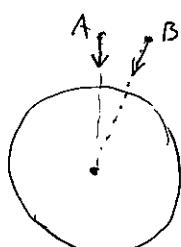
$$ds^2 = \tilde{\gamma}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu \quad \tilde{x}^\mu = (t, R, \varphi, z)$$

$$= -dt^2 + dR^2 + R^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ 0 & 1 & R^2 & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \Gamma_{R\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi R}^\varphi = \frac{1}{R} \Rightarrow \text{重力加速度?}$$

座標変換で消えない、「重力」の効果を考慮する。



AとBにおける重力の効果は座標変換で消えない。

\rightarrow AとBにおける重力加速度の差が「重力の本体?

物理的には

潮汐力 (tidal force)

数学的には

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(B) - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(A) \text{ または } E.$$

量 \Rightarrow 曲率テンソル

(curvature tensor)