§7 球対称真空解の導出

7-1 計量の形

cf. 平坦な Minkowski 時空 ⇒ 原点(どこを取ってもよい)のまわりに球対称

$$ds^2 = \underbrace{-dt^2 + dr^2}_{\theta,\varphi\text{に依存しない}} + r^2 \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}_{\text{この部分の計量(2次元球面)は } r,t \text{ によらない}} \quad ①$$

[一般化]

$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 = d\Omega^2$ の依存性をそのままに保って一般化する

座標 (t, r, θ, φ) に対して

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dtdr + g_{rr}dr^2 + \chi^2 d\Omega^2 \quad \chi = \chi(t,r) \geq 0 \text{ とする}$$

$$+ 2g_{t\theta}dtd\theta + 2g_{t\varphi}dtd\varphi$$

$$+ 2g_{r\theta}drd\theta + 2g_{r\varphi}drd\varphi \quad ② \qquad (\theta,\varphi \text{ の非対角項} = 0)$$

a) r = 一定の球面上 $(dr = 0)$ で

② ⇒ $ds^2 = g_{tt}dt^2 + \chi^2 d\Omega^2 + 2g_{t\theta}dtd\theta + 2g_{t\varphi}dtd\varphi \quad ③$

③ より $g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = 2g_{t\theta}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial t}$: t 方向の基底, $\frac{\partial}{\partial \theta}$: θ 方向の基底

この値が有限なら、時空に特別な方向性が生じてしまう

($\frac{\partial}{\partial \theta}$ と逆向きのベクトル $-\frac{\partial}{\partial \theta}$ に対して

$$g\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = -g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \neq 0$$

⇒ $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 方向と $-\frac{\partial}{\partial \theta}$ 方向の世界間隔が異なる長さをもち得る)

$$\longrightarrow \quad g_{t\theta} = 0 \quad ④$$

同様に考えて

$$g_{t\varphi} = 0 \quad ⑤$$

b) t=一定の面上 ($dt=0$) で考えると、

(a) と同様の議論から、

$$g_{r\theta} = 0 \quad ⑥$$

$$g_{r\varphi} = 0 \quad ⑦$$

以上 a), b) より

$$② \Rightarrow \quad ds^2 = g_{tt}\,dt^2 + 2g_{tr}\,dt\,dr + g_{rr}\,dr^2 + \chi^2(t,r)\,d\Omega^2 \quad ⑧$$

$$g_{tt} = g_{tt}(t,r), \quad g_{tr} = g_{tr}(t,r), \quad g_{rr} = g_{rr}(t,r)$$

(θ, φ には依存しない)

ここで ⑨ にならって

$$\begin{cases} \chi(t,r) \equiv R \\ t = T \end{cases} \quad ⑨$$

となる座標変換を行なうと ⑧ は

$$ds^2 = g_{TT}(T,R)\,dT^2 + 2g_{TR}(T,R)\,dT\,dR + g_{RR}(T,R)\,dR^2 + R^2 d\Omega^2 \quad ⑩$$

と書ける

$$\left(g_{TT} = \frac{\partial t}{\partial T}\frac{\partial t}{\partial T} g_{tt} + \frac{\partial t}{\partial T}\frac{\partial r}{\partial T} g_{tr} + \frac{\partial r}{\partial T}\frac{\partial t}{\partial T} g_{rt} + \frac{\partial r}{\partial T}\frac{\partial r}{\partial T} g_{rr} \right)$$

など

ここで、

$$(g_{TT}\,dT + g_{TR}\,dR)\cdot A(T,R) \equiv d\tau \quad ⑪ \quad ; \tau = \tau(T,R)$$

τ の完全微分

となる積分因子が存在する。(独立変数は2つなので)

すると、

$$⑩ \Rightarrow \quad ds^2 = (g_{TT}\,dT + 2g_{TR}\,dR)\,dT + g_{RR}\,dR^2 + R^2 d\Omega^2$$

$$= \frac{1}{g_{TT}}\left(\frac{d\tau}{A} + g_{TR}\,dR\right)\left(\frac{d\tau}{A} - g_{TR}\,dR\right) + g_{RR}\,dR^2 + R^2 d\Omega^2$$

$$= \frac{1}{A^2 g_{TT}}\,d\tau^2 + \left(g_{RR} - \frac{(g_{TR})^2}{g_{TT}}\right) dR^2 + R^2 d\Omega^2 \quad ⑫$$

と、対角化できる。

τの代わりにtを座標とすれば、

$$ds^2 = g_{\tau\tau}(\tau, R)\,d\tau^2 + g_{RR}(\tau, R)\,dR^2 + R^2 d\Omega^2 \quad (13)$$

が球対称時空（※真空でなくてもよい）の計量の一般形となる。

τ=一定かつR=一定のとき

$ds^2 = R^2 d\Omega^2$ ⇒ R座標は、この2次元面（球面）の面積が$4\pi R^2$となるように定義されている。

以下では $\tau \to t$, $R \to r$ と書く。

7-2 球対称真空解

$$ds^2 = -e^{2\phi}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (14)$$

$\begin{cases} \phi = \phi(t, r) \\ \lambda = \lambda(t, r) \end{cases}$ ここで、時間的ベクトルのノルムが負、空間的〃 正 となるように符号をとった。

真空（$T_{\mu\nu} = 0$）でのEinstein方程式

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) = 0 \quad (15)$$

(14)の時空のRicciテンソルを計算すると（$f' \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$, $\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t}$）

$$R_{tt} = e^{2\phi - 2\lambda}\left[\phi'' + \phi'\left(\phi' - \lambda' + \frac{2}{r}\right)\right] - e^{\phi - \lambda}\left(\dot{\lambda} e^{\lambda - \phi}\right)^{\cdot} \quad (16)$$

$$R_{tr} = -\frac{2e^{\lambda}}{r}\left(e^{-\lambda}\right)^{\cdot} \quad (17)$$

$$R_{rr} = -\phi'' - \phi'(\phi' - \lambda') + \frac{2\lambda'}{r} + e^{-\phi + \lambda}\left(\dot{\lambda} e^{\lambda - \phi}\right)^{\cdot} \quad (18)$$

$$R_{\theta\theta} = -r\phi' e^{-2\lambda} + r\lambda' e^{-2\lambda} + 1 - e^{-2\lambda} \quad (19)$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} \cdot \sin^2\theta \quad (20)$$

$$R_{t\theta} = 0,\ R_{t\varphi} = 0,\ R_{r\theta} = 0,\ R_{r\varphi} = 0,\ R_{\theta\varphi} = 0 \quad (21)$$

※このような対称性のある時空で曲率を計算する場合、"Cartanの構造方程式"を使うと比較的に楽

Misner, Thorne, Wheeler "Gravitation" §14.5, 14.6

⑰ = 0 より

$$(e^{-\lambda})^{\bullet} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda(r) \quad ㉒$$

すると、⑯, ⑱ の時間微分の項は 0 になる。

⑯ = 0 & ⑱ = 0

$$\Rightarrow \quad \phi' + \lambda' = 0 \quad ㉓$$

㉓ より、⑲ = 0 は、

$$2re^{-2\lambda}\frac{d\lambda}{dr} + 1 - e^{-2\lambda} = 0 \quad ㉔$$

㉔ は解析的に解ける。

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1-\frac{C}{r}} \quad (C: 積分定数) \quad ㉕$$

一方、㉓ より

$$\phi = -\lambda(r) + K(t) \quad (K(t): t の任意関数) \quad ㉖$$

よって、

$$e^{2\phi} = e^{-2\lambda}e^{2K} = \left(1-\frac{C}{r}\right)e^{2K} \quad ㉗$$

⑭ において、$\tilde{t} \equiv \int e^{2K(t)}dt$ として時間座標を定義しなおすと、

$$⑭: ds^2 = -\left(1-\frac{C}{r}\right)d\tilde{t}^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{C}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad ㉘$$

原点から遠方では

$$g_{\tilde{t}\tilde{t}} = -1 + \frac{2\Phi_N}{r}$$

Φ_N : Newton の重力ポテンシャル

$\Phi_N = \frac{2M}{r}$ より、 $\underline{C = 2M}$

$$\therefore \quad ㉘ \quad ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad ㉙$$

Schwarzschild 解

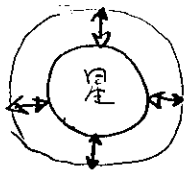
($\tilde{t} \to t$ と書き直した)

当初 ϕ, λ には時間依存性を仮定したが、結局 ㉙ は

時間に依存しなくなった。

「Birkoff の定理」

Einstein 方程式の球対称真空解は静的である。



球対称性を保ったまま振動する星の外部の時空は ㉙ の形に書ける

(真空)

⇓

・外部は時間的に変動しない

・球対称な運動からは重力波は放射されない