

§8 線形近似と重力波

8-1 Minkowski 時空からのおおむね平坦な時空

§6 では、静的、弱い重力、物体の遅い運動 を考えて Einstein 方程式を定めたが、ここでは 静的、物体の遅い運動 の仮定を外す。

(計量) $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ — ① て $|h_{\mu\nu}| = \mathcal{O}(\epsilon)$ とする。 ($\epsilon \ll 1$)

\uparrow
diag(-1, 1, 1, 1)

$h_{\mu\nu}$ は、Lorentz 変換 においてテンソル的に変換するので、Minkowski 時空上のテンソルとみなせる。

※ 一般座標変換と異なり、特に Lorentz 変換を考慮する。

$$x^\mu = L^\mu_{\alpha'} x^{\alpha'}$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ はこの座標変換により、① の形を保持するとする。

$$g_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} + h_{\mu'\nu'} \quad ; \quad |h_{\mu'\nu'}| = \mathcal{O}(\epsilon)$$

\uparrow
diag(-1, 1, 1, 1)

すなわち、 $g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta} = L^\alpha_{\mu'} L^\beta_{\nu'} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})$

$$\eta_{\mu'\nu'} + h_{\mu'\nu'} = L^\alpha_{\mu'} L^\beta_{\nu'} \eta_{\alpha\beta} + L^\alpha_{\mu'} L^\beta_{\nu'} h_{\alpha\beta}$$

\parallel
 $\eta_{\mu'\nu'}$

$$\therefore h_{\mu'\nu'} = L^\alpha_{\mu'} L^\beta_{\nu'} h_{\alpha\beta}$$

すなわち、 $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$, $h^{\mu}_{\ \mu} = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\mu}$ など定義される。

次に、 $\mathcal{O}(\epsilon)$ の下位の座標変換を (1) と (2) の $h_{\mu\nu}$ の振舞いと言わねば。

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^{\alpha'} = x^\alpha - \xi^\alpha(x) \quad \text{②} \quad (|\xi| = \mathcal{O}(\epsilon))$$

$$\frac{\partial \tilde{x}^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \quad \text{③}$$

$$\therefore \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^{\alpha'}} = \left[\frac{\partial \tilde{x}^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \right]^{-1 \beta}_{\alpha'} = \delta^\beta_\alpha + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{④}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta} = \left(\delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right) \left(\delta^\beta_\nu + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
&= \eta_{\mu\nu} + \underbrace{\eta_{\mu\beta} \partial_\nu \xi^\beta + \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha}_{\tilde{h}_{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \eta_{\mu\nu} + \partial_\nu (\eta_{\mu\beta} \xi^\beta) + \partial_\mu (\eta_{\alpha\nu} \xi^\alpha) + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \underbrace{\tilde{\eta}_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu}_{\tilde{h}_{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

∴ $\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu$ ⑤

※ これは座標変換②による変化であり、物理的内容の変化は伴わない
(一般相対性原理より)

(電磁気学との対比)

EM : ベクトルポテンシャル A^μ
 $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$ ⑥ χ : ゲージスカラー場
 A_μ と \tilde{A}_μ は 同一の物理的状態を記述する (ゲージ変換)



grav. ②に現れる ξ^α : 重力場 $h_{\mu\nu}$ のゲージ変換⑤を誘導する
 ゲージベクトル場

以下では①の計算において、接続係数と曲率を $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ まで計算.

④ 接続係数

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} (\eta^{\rho\lambda} - h^{\rho\lambda}) \cdot [\partial_\mu (\eta_{\nu\lambda} + h_{\nu\lambda}) + \partial_\nu (\eta_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu}) - \partial_\lambda (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})] \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} [\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad ⑦
\end{aligned}$$

曲率

$$\begin{aligned}
R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} &= \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \underbrace{\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}}_{\text{⑦ } \epsilon^2, \mathcal{O}(\epsilon^2)} \\
&= \frac{1}{2}\partial_{\mu}\{\eta^{\rho\lambda}[\partial_{\nu}h_{\sigma\lambda} + \partial_{\sigma}h_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}h_{\nu\sigma}]\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\partial_{\nu}\{\eta^{\rho\lambda}[\partial_{\mu}h_{\sigma\lambda} + \partial_{\sigma}h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\sigma}]\} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}\{\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\lambda}h_{\mu\sigma} - \partial_{\mu}\partial_{\lambda}h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\lambda\mu}\} \quad \text{⑧}
\end{aligned}$$

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\lambda}h^{\lambda}_{\sigma} - \underbrace{\partial_{\mu}\partial^{\mu}h_{\sigma\nu}}_{\square} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h) \quad \text{⑨}$$

$h = h^{\mu}_{\mu}$

$$R = \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h \quad \text{⑩}$$

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \\
&= \frac{1}{2}(\partial_{\kappa}\partial_{\mu}h^{\kappa}_{\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\kappa}h^{\kappa}_{\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \eta_{\mu\nu}\partial_{\kappa}\partial_{\lambda}h^{\kappa\lambda} + \eta_{\mu\nu}\square h) \quad \text{⑪}
\end{aligned}$$

* Q: 上で考えたゲージ変換を行なると、曲率はどのように変化するか？

A: 物理的状態は同一なので、曲率は変化しない

ex. $h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu}$, $h = \tilde{h} - 2\partial_{\mu}\xi^{\mu}$ ⑫ へ代入

$$\begin{aligned}
R &= \partial_{\mu}\partial_{\nu}(\tilde{h}^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\xi^{\nu} - \partial^{\nu}\xi^{\mu}) - \square(\tilde{h} - 2\partial_{\mu}\xi^{\mu}) \\
&= \partial_{\mu}\partial_{\nu}\tilde{h}^{\mu\nu} - \square\tilde{h} \\
&= \tilde{R}
\end{aligned}$$

8-2 重力場の自由度

$h_{\mu\nu}$ の各成分を 3次元空間での変換性で分類

(4次元時空を 3次元(空間) + 1次元(時間)に分解する見方
 \Rightarrow 時間と空間の混じり合, 重力場の方程式を: 時間発展の形式にする)

(0,0) 成分 \Rightarrow (3次元) スカラー

$h_{00} \equiv -2\Phi$ (12)

(0,i) 成分 \Rightarrow ベクトル

$h_{0i} \equiv W_i$ (13)

(i,j) 成分 \Rightarrow テンソル

$h_{ij} \equiv 2S_{ij} - 2\Phi\delta_{ij}$ (14)

(* i, j, k, l は 1~3)

$\Phi \equiv -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij}$ (15)

$S_{ij} \equiv \frac{1}{2}(h_{ij} - \frac{1}{3}(\delta^{kl}h_{kl})\delta_{ij})$ (16)

Φ (1成分)
 W_i (3成分)
 Φ (1成分)
 S_{ij} (5成分)

}

\Rightarrow 10成分

(* Φ は h_{ij} のトレース成分 \Rightarrow スカラー
 S_{ij} は h_{ij} のトレースフリー成分
 ($\text{tr} S_{ij} = 0$)

すなわち
 $ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu$

$= -(1 + 2\Phi) dt^2 + W_i (dt dx^i + dx^i dt) + [(1 - 2\Phi)\delta_{ij} + 2S_{ij}] dx^i dx^j$ (17)

この計量により Einstein テンソル (11) 及び

($G_{00} = 2\Delta\Phi + \partial_k \partial_l S^{kl}$ (18)

$G_{0j} = -\frac{1}{2}\Delta W_j + \frac{1}{2}\partial_j \partial_k W^k + 2\partial_0 \partial_j \Phi + \partial_0 \partial_k S_j^k$ (19)

$G_{ij} = (\delta_{ij}\Delta - \partial_i \partial_j)(\Phi - \Psi) + \delta_{ij}\partial_0 \partial_k W^k - \partial_0 \partial_{ci} W_j^c + 2\delta_{ij}\partial_0^2 \Phi - \square S_{ij} + 2\partial_k \partial_{ci} S_j^k - \delta_{ij}\partial_k \partial_l S^{kl}$ (20)

ここで、添字 i, j, k, l の上か下かは 3次元 Euclid 計量 δ_{ij} で行なう。

• $\Delta \equiv \delta^{ij}\partial_i \partial_j$ (通常 Laplacian)

• $\square \equiv -\partial_0^2 + \Delta$ (D'Alembertian)

• $c\partial_i S_j^k = \frac{1}{2}(\partial_i S_j^k + \partial_j S_i^k)$

(18) - (20) について

- (18), (19) には計量の 高々一階の時間微分 (か含まれない)
- (20) には S_{ij} の 二階微分 (\square)

⇒ 連, 生, W_i は力学的自由度をもたない

S_{ij} は力学的自由度をもつ ⇒ 重力波の自由度

* (18), (19) : 拘束条件の式

(20) : 時間発展方程式 ($S_{ij}, \frac{\partial}{\partial t} S_{ij}$ の連立一階PDE)

例. 電磁場

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \cdot E &= 4\pi\rho \end{aligned} \right\} B, E \text{ の拘束条件}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= 4\pi j + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned} \right\} B, E \text{ の発展方程式}$$

8-3 ゲージ固定

8-1 で見たように $h_{\mu\nu}$ には $h^{\alpha\beta}$ のゲージ変換自由度がある。

⇒ ξ^α をうまく選ぶのは 計算の見通しが良くなる。現象を理解し易くなる。

cf. EM

$$\left(\begin{aligned} &\text{ポテンシャル } A^\alpha \\ &\partial_i A^i = 0 \quad (\text{Coulomb ゲージ}) \\ &\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{Lorenz ゲージ}) \quad \text{など} \end{aligned} \right.$$

Φ, Ψ, W_i, S_{ij} のゲージ変換

$\Phi \rightarrow \Phi + \partial_0 \xi^0$ (21)

$\Psi \rightarrow \Psi - \frac{1}{3} \partial_i \xi^i$ (22)

$W_i \rightarrow W_i + \partial_0 \xi_i - \partial_j \xi^j$ (23)

$S_{ij} \rightarrow S_{ij} + \partial_{(i} \xi_{j)} - \frac{1}{3} \partial_k \xi^k \cdot \delta_{ij}$ (24)

ξ^α の選定方向の自由度を使って Einstein 方程式を扱いやすい形に書く.

6

transverse + traceless (TT) $h^{\mu\nu}$ -ジ

$$\boxed{\partial_i S^{ij} = 0} \quad (25) \quad \left(\text{cf. } \partial_i A^i = 0 \text{ EM での Coulomb } h^{\mu\nu} \text{-ジ} \right)$$

$$S_{ij}^{\text{NEW}} = S_{ij}^{\text{OLD}} + \frac{1}{2} \partial_i \xi_j + \frac{1}{2} \partial_j \xi_i - \frac{1}{3} \partial_k \xi^k \cdot \delta_{ij} \quad (24)$$

$$\downarrow$$

$$\partial_i S_{ij}^{\text{NEW}} = \partial_i S_{ij}^{\text{OLD}} + \frac{1}{2} \Delta \xi^j + \frac{1}{2} \partial^j (\partial_i \xi^i) - \frac{1}{3} \partial^j (\partial_k \xi^k) \quad (26)$$

$\partial_i S_{ij}^{\text{NEW}} = 0$ の条件を課すには.

$$(25) \Rightarrow \Delta \xi^j + \frac{1}{3} \partial_j (\partial_k \xi^k) = -2 \partial_i S^{ij} \quad (27)$$

(これを解いて ξ^i を求め、(24) ~ (26) を適用すればよい.

ただし、(27) は ξ^0 の条件をまだ決めていない \Rightarrow もう 7 条件を付け加える

$$\boxed{\partial_i W^i = 0} \quad (28)$$

$$\partial_j W^j = \dot{W}^j + \partial_0 \xi^j - \partial^j \xi^0 \quad (29)$$

$$\downarrow$$

$$\partial_j W^j = \partial_j \dot{W}^j + \partial_0 (\partial_j \xi^j) - \Delta \xi^0 \quad (29)$$

そこで $\partial_j W^j = 0$ の条件は.

$$(29) \Rightarrow \Delta \xi^0 = \partial_j \dot{W}^j + \partial_0 (\partial_j \xi^j) \quad (30)$$

これを解いて、 ξ^0 を求め、(27) - (29) に適用するこを課せる.

(25) と (28) の $h^{\mu\nu}$ -ジ条件下での Einstein 方程式は

$$G_{00} = 2 \Delta \Psi = 8\pi T_{00} \quad (31)$$

$$G_{0j} = -\frac{1}{2} \Delta W_j + 2 \partial_0 \partial_j \Psi = 8\pi T_{0j} \quad (32)$$

$$G_{ij} = (\delta_{ij} \Delta - \partial_i \partial_j) (\Psi - \bar{\Psi}) = \partial_0 \partial_{(i} W_{j)} + 2 \delta_{ij} \partial_0^2 \Psi - \square S_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad (33)$$

8-4 重力波の伝播

ここでは、平坦な時空で、真空中における重力の変動を考へる。

• transverse-traceless (TT) 条件 (25), (28)

• 真空 $T_{\mu\nu} = 0$

(31) $\Rightarrow \Delta \Psi = 0 \Rightarrow \Psi = 0$ (34) (全空間で正則のとき)

(32) $\Rightarrow \Delta W_i = 0 \Rightarrow W_i = 0$ (35) (")

(33) のトレース成分 $\Rightarrow \Delta \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ (36) (")
(S_{ij} はトレースフリーであることに注意 (16))

(33) のトレースフリー成分 $\Rightarrow \square S_{ij} = 0$ (37)

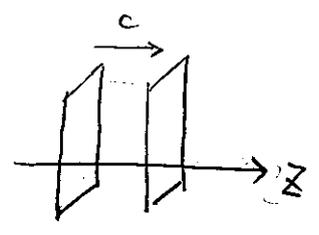
よて S_{ij} : この近似で唯一現れる重力場の成分

transverse-traceless (TT) 成分

(37) は この成分が 光速で伝播する波 として振舞うことを示す。

\Rightarrow 重力波 (gravitational wave)

■ z 方向に進行する平面波



$S_{ij} = \sigma_{ij} \exp[i(kz - \omega t)]$, σ_{ij} : 定数

• (37) $\Rightarrow (-k^2 + \omega^2)\sigma_{ij} = 0 \Rightarrow \omega^2 = k^2$ (位相速度 = 1 (= c))
- (38)

• (35) (TT-条件)

$\Rightarrow k \cdot \sigma_{ij} = 0$ (39) $\Rightarrow \sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ (40)

• トレースフリー条件 $S^i_i = 0$

$\Rightarrow \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0$ (41)

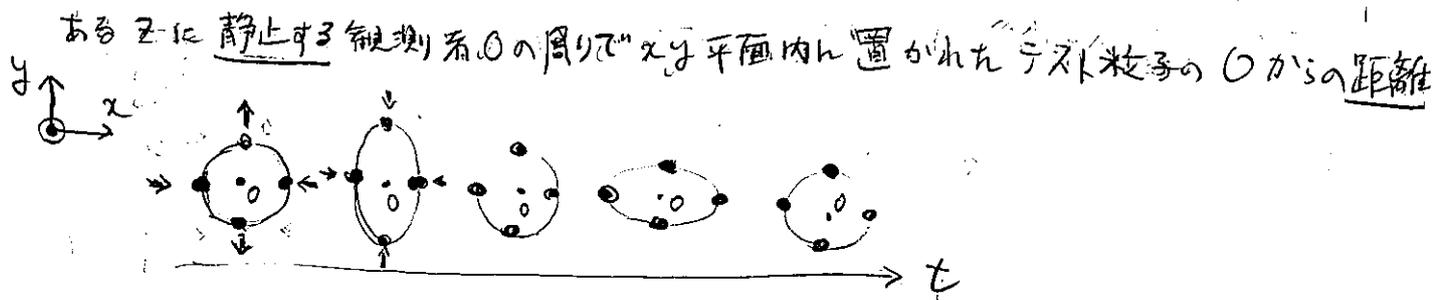
(40), (41) より

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ b+x & 0 & 0 \\ b+x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \equiv \sigma_x \quad \text{--- 「(x) E-ド」} \\ \sigma_{xx} = -\sigma_{yy} \equiv \sigma_+ \quad \text{--- 「(+) E-ド」} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{2つの独立な} \\ \text{「偏光」状態} \end{array}$$

(+) E-ド を考える.

$$(42): ds^2 = -dt^2 + (1 + \sigma_+ \exp[i\omega(z-t)]) dx^2 + (1 - \sigma_+ \exp[i\omega(z-t)]) dy^2 + dz^2$$



* 重力波が入射してもラスタ粒子の 座標値 は変化しない

ラスタ粒子の 4元速度 u^μ

$$\frac{d}{d\tau} u^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0 \quad (\text{測地線})$$

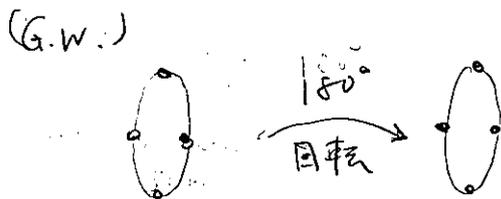
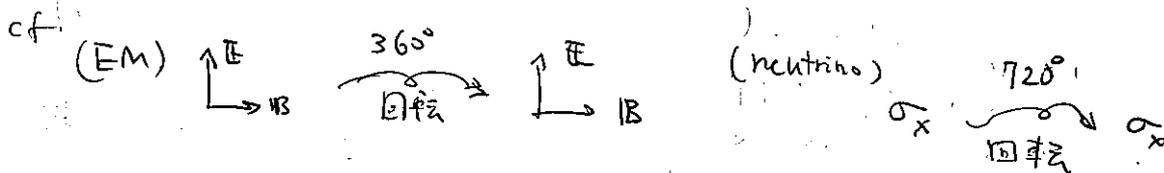
ラスタ粒子が $t=0$ で静止していたとすると $u^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha = (1, 0, 0, 0)$

$$\frac{d}{d\tau} u^\mu = -\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_t h_{\nu 0} + \partial_t h_{0\nu} - \partial_\nu h_{00})$$

$$= 0$$

よって $t > 0$ でも $u^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha$, $\frac{du^\alpha}{d\tau} = 0$ となる.

** 重力波の量子 (graviton) のスピンは 2



$\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ 回転すると重なり

● L-型干渉計型

● LIGO (USA) : 2箇所 (Hanford, Livingston) に腕長 4km の L字型アンテナ

VIRGO (Italy-France) : 3km L字アンテナ @ Pisa

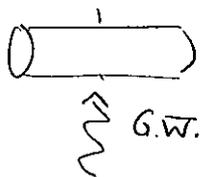
GEO 600 (German-Britain) : 600m L字アンテナ @ Hannover

KAGRA (日本) : 3km L字アンテナ @ 神岡

eLISA (ESA) : 宇宙空間の人工飛行体3機で3角形のアンテナ
500万km @ L1点

DECIGO (日本) :

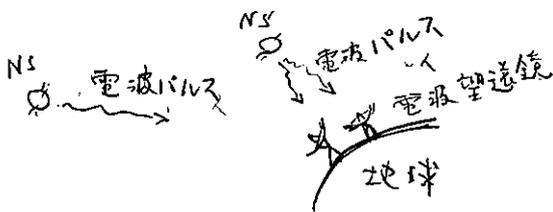
● 共鳴型 (バネ型) 検出器



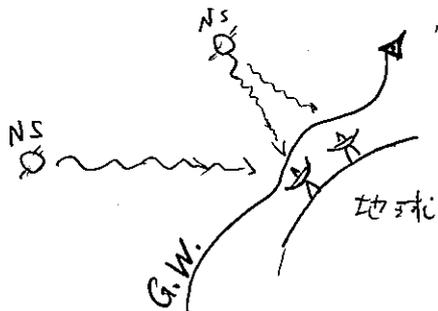
重力波が入射すると強制振動で伸び縮み (G.W.)



● ポルサータイミング



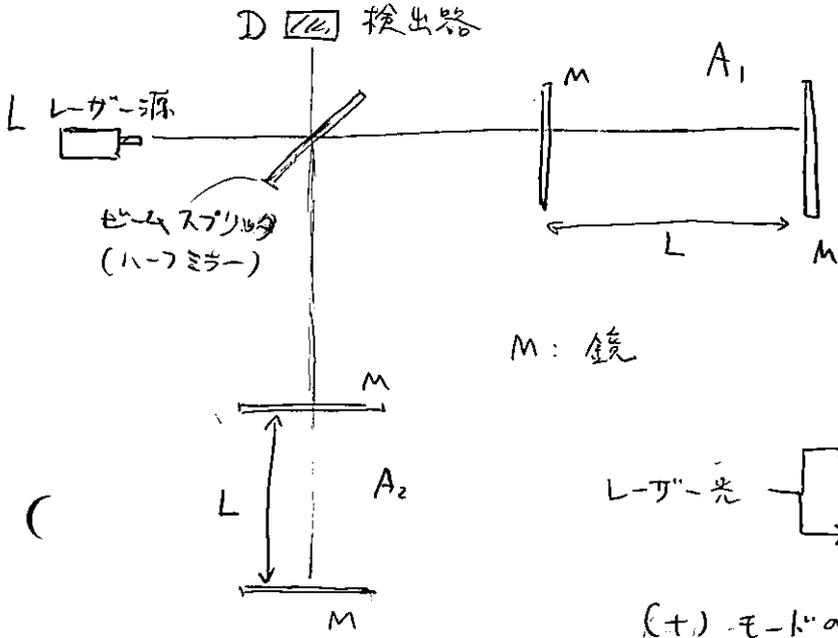
自転する中性子星 (neutron star, NS) からの非常に規則正しい電波パルス (パルサー) を観測する



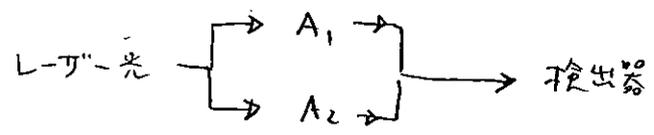
電波望遠鏡でのパルス間隔に変動が生じる

■ レーザ-干渉計型の原理

Michelson interferometer
& Fabry-Pérot cavity



M: 鏡



(+) モードの重力波が入射すると A1, A2 の
光路長が変動

↓
検出器での干渉パターンが変動

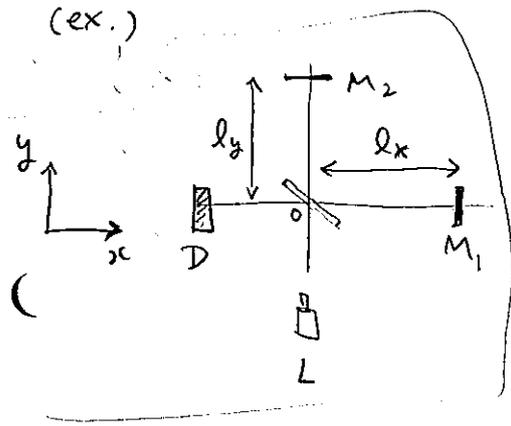
レーザー光の波長 λ

$$ds^2 = -dt^2 + (1+h_+)(dx)^2 + (1-h_+)(dy)^2 + dz^2$$

① x方向のレーザー光の双方向の経路

$$ds^2 = 0, \quad dy = dz = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+h_+}}$$



与えられた時刻 T に O から戻ってくる光が
O を通る時刻 τ_1 とする ($\tau_1 < T$)

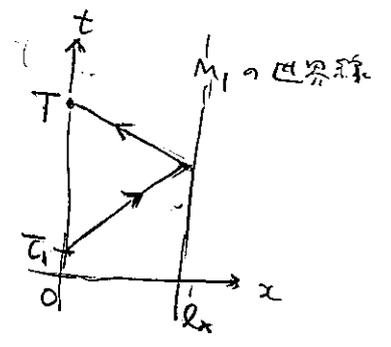
$$\int_{\tau_1}^T \frac{1}{\sqrt{1+h_+}} dt = \frac{2l_x}{c}$$

$$|h_+| \ll 1 \Rightarrow \int_{\tau_1}^T (1 - \frac{1}{2}h_+) dt = \frac{2l_x}{c}$$

$$\therefore T - \tau_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^T h_+(t) dt = \frac{2l_x}{c}$$

$$\therefore \tau_1 = T - \frac{2l_x}{c} - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^T h_+(t) dt \quad (43)$$

($\because h \rightarrow 0$ かつ $\tau_1 \rightarrow T - \frac{2l_x}{c}$)



t_1 で 0 に λ の光の位相が T で 0 に戻るときの位相 (位相は光路に沿って保存)

$$\phi_x(t) = \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot t_1 = \frac{2\pi c}{\lambda} \left(T - \frac{2l_x}{c} - \frac{1}{2} \int_{T-2l_x/c}^T h_+(t) dt \right) \quad (44)$$

③ y 方向に進んで、時刻 t に 0 に戻るときの光の位相

$$\phi_y(t) = \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot \left(T - \frac{2l_y}{c} - \frac{1}{2} \int_{T-2l_y/c}^T (-h_+(t)) dt \right)$$

よって、時刻 t での、2つの経路 ($0 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$ と $0 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$) を通るときの光の位相差は、

$$\Delta\phi = \phi_x(t) - \phi_y(t) = \frac{2\pi}{\lambda} (l_y - l_x) - \Delta\phi_{GR}$$

重力波による位相差

(

$$(45) \quad \Delta\phi_{GR} \equiv \frac{2\pi c}{\lambda} \int_{T-2L/c}^T h_+(t) dt$$

重力波外無いと見る位相差

$$(l_x \approx l_y = L \text{ とする})$$

8-6 重力波の発生

8-1 の (11) 式に戻って考える。

Einstein 方程式:

(

$$(46) \quad \partial_\kappa \partial_\mu h^{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\kappa h^{\kappa\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial_\kappa \partial_\lambda h^{\kappa\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h = 16\pi T_{\mu\nu}$$

"trace-reversed" テンソル $\bar{h}_{\mu\nu}$ と導入

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (47)$$

$$\left(\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} & (48) \\ \bar{h} &= -h & (49) \end{aligned} \right)$$

すなわち (46) は

$$\begin{aligned} \partial_\kappa \partial_\mu (\bar{h}^{\kappa\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\kappa\nu} \bar{h}) + \partial_\nu \partial_\kappa (\bar{h}^{\kappa\mu} - \frac{1}{2} \delta^{\kappa\mu} \bar{h}) - \square (\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}) \\ + \partial_\mu \partial_\nu \bar{h} - \eta_{\mu\nu} \partial_\kappa \partial_\lambda (\bar{h}^{\kappa\lambda} - \frac{1}{2} \eta^{\kappa\lambda} \bar{h}) - \eta_{\mu\nu} \square \bar{h} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (50) \end{aligned}$$

これは、次のゲージ条件を課す。

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (51) \quad \left(\text{cf. E.M. の Lorenz 条件 } \partial_\alpha A^\alpha = 0 \right)$$

⑤0 は、
$$-\square \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$$

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \quad (52)$$

これは、右辺を源泉 (source) とする $\bar{h}_{\mu\nu}$ の非斉次波動方程式。

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(t, \vec{r}) \quad \vec{r}: 3\text{次元空間の位置ベクトル}$$

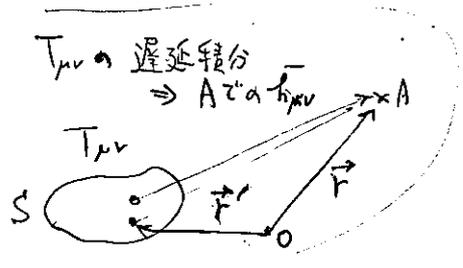
⑤2 の一般解は、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 4 \int \frac{T_{\mu\nu}(t-|\vec{r}-\vec{r}'|, \vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' + H_{\mu\nu} \quad (53)$$

$\square H_{\mu\nu} = 0$: 斉次解 (考えている系の外から伝播してくる重力波)

⑥ 四重極公式

孤立した重力波源 S の外には観測者 A を考えよ。 ($H_{\mu\nu} = 0$)



また、 S でのエネルギー、運動量保存は

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (54)$$

⑤4 の $\mu=0$ 成分:

$$\partial_0 T^{00} + \partial_j T^{0j} = 0 \quad j=1,2,3 \quad (55)$$

$$\partial_0 (55) \Rightarrow \partial_0^2 T^{00} + \partial_0 \partial_j T^{0j} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_0^2 T^{00} = -\partial_j (\partial_0 T^{0j}) \quad (54 \text{ の } \mu=j \text{ 成分})$$

$$\partial_0 T^{j0} + \partial_k T^{jk} = 0 \quad ; k=1,2,3$$

$$= -\partial_j \partial_k T^{jk}$$

S の点の空間座標 (Cartesian) $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$

$$\begin{aligned} (\partial_0^2 T^{00}) x^l x^m &= -\partial_j \partial_k T^{jk} x^l x^m \\ &= +\partial_j (x^l \partial_k T^{jk}) x^m - \delta_j^l \partial_k T^{jk} x^m \\ &= +\partial_j \left\{ \partial_k (x^l T^{jk}) - \delta_k^l T^{jk} \right\} x^m + \partial_k T^{lk} x^m \\ &= +\partial_j \partial_k (x^l T^{jk}) x^m - \partial_j T^{jl} x^m - \partial_k T^{lk} x^m \\ &\Rightarrow -2 \cdot \partial_j T^{jl} x^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{5 式}) &= +\partial_j \{ x^m \partial_k (x^l T^{jk}) \} - \delta_j^m \partial_k (x^l T^{jk}) - 2 \partial_j T^{jl} x^m \\
 &= +\partial_j \partial_k (x^m x^l T^{jk}) - \partial_j (\delta_k^m x^l T^{jk}) - \partial_k (x^l T^{mk}) - 2 \partial_j T^{jl} x^m \\
 &= +\partial_j \partial_k (x^m x^l T^{jk}) - \partial_j (x^l T^{jm}) - \partial_k (x^l T^{mk}) + \underbrace{2 \partial_j T^{jl} x^m}_{\substack{-2 \partial_j (T^{jl} x^m) + 2 \delta_j^m T^{jl}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \partial_0^2 (x^l x^m T^{00}) &= +\partial_j \partial_k (x^m x^l T^{jk}) - 2 \partial_j (x^l T^{jm}) \\
 &\quad - 2 \partial_j (x^m T^{jl}) \\
 &\quad + 2 T^{ml} \quad (56)
 \end{aligned}$$

($\Sigma \subset \Sigma^4$ 内の点 \vec{r} に対し, A は S の十分離れたところにある
 $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|, |\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r}| \equiv r$

$$(53) \Rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4}{r} \int T_{\mu\nu}(t-r, \vec{r}') d^3\vec{r}'$$

$\mu=l, \nu=m$ とすると

$$\bar{h}_{lm} = \frac{4}{r} \int T_{lm}(t-r, \vec{r}') d^3\vec{r}'$$

$$(56) \longrightarrow = \frac{2}{r} \int \partial_0^2 (x_l x_m T^{00}(t-r, \vec{r}')) d^3\vec{r}' + \frac{2}{r} \int \partial_j [B^{jlm}] d^3\vec{r}'$$

Gauss の定理
 表面項 = 0 \Rightarrow

$$= \frac{2}{r} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \int x_l x_m T^{00}(t-r, \vec{r}') d^3\vec{r}'$$

\uparrow
 (56) の残りの項

$$\therefore \Sigma \subset \Sigma^4 \quad \bar{I}_{lm} \equiv \int x_l x_m T^{00}(t-r, \vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (57) \quad (\text{エネルギー密度の四重積分})$$

$$\bar{h}_{lm} = \frac{2}{r} \frac{d^2}{dt^2} \bar{I}_{lm} \quad (58)$$

重力波の四重極公式

* $h^{\mu\nu} = 0$ 条件 (51) より

$$\left. \begin{aligned}
 \partial_0 \bar{h}^{00} + \partial_k \bar{h}^{k0} &= 0 \\
 \partial_0 \bar{h}^{0j} + \partial_k \bar{h}^{kj} &= 0 \\
 k, j &= 1 \sim 3
 \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow \bar{h}^{kj}$ が (58) で決まる $\bar{h}^{00}, \bar{h}^{0j}$ は
 この式解を求めると物理的自由度は存在

Newton力学の成立する弱い重力源では

$$T_{00} \approx \rho \text{ (質量密度)}$$

⇒ I_{lm} は Newton力学の慣性モーメントテンソルに帰着

▷ c, G を復活させる

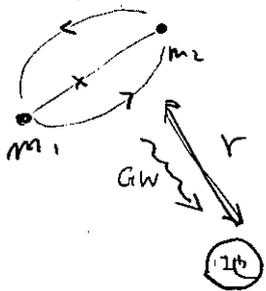
$$\textcircled{59} \quad \bar{h}_{ij} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij} \quad , \quad I_{ij} = \int \rho x_i x_j d^3x$$

ex. $r = 20 \text{ Mpc}$ ($2 \times 10^7 \text{ pc}$; $1 \text{ pc} (1 \text{ 光年}) \approx 3 \times 10^{16} \text{ m}$) の距離にある銀河団中のブラックホール連星を考えると.

(cf. おと座銀河団 (Virgo cluster) までの距離 $\sim 16 \text{ Mpc}$)

ブラックホールの質量を m_1, m_2 とし、連星間距離を a とすると、軌道の角振動数 Ω は

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}$$



連星系の慣性モーメントの大きさを I は

$$I = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} a \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} a \right)^2$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \quad \text{の程度}$$

よって、地球上での重力波の振幅の大きさを \bar{h} は

$$\bar{h} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I} \sim \frac{2G}{c^4 r} \Omega^2 I \sim \frac{2G^2}{c^4 r} \frac{m_1 m_2}{a}$$

$$\sim \frac{2}{ra} \left(\frac{Gm_1}{c^2} \right) \left(\frac{Gm_2}{c^2} \right)$$

$$m_1 = m_2 \equiv m \text{ とし } a = 6 \cdot \frac{G(m_1 + m_2)}{c^2} = 12 \cdot \frac{Gm}{c^2} \text{ とすると}$$

$$\bar{h} \sim \frac{1}{6r} \cdot \left(\frac{Gm}{c^2} \right)$$

$$m = 10 M_\odot \quad (M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg} : \text{太陽質量})$$

$$\bar{h} \sim 4 \times 10^{-24}$$

(18) 式

$$G_{00} = \frac{1}{2} \left[\partial_k \partial_0 h_{ko} + \partial_0 \partial^k h_{ko} - \square h_{00} - \partial_0^2 h - \eta_{00} \partial_k \partial^k h + \eta_{00} \square h \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\cancel{\partial_0^2 h_{00}} + \cancel{\partial_i \partial_0 h_{io}} - \cancel{\partial_0^2 h_{00}} + \partial_0 \partial_i h_{io} + \cancel{\partial_0^2 h_{00}} - \cancel{\partial_0^2 h} + \partial_k \partial^k h + \cancel{\partial_0^2 h} - \cancel{\partial_0^2 h} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \cancel{2\partial_0 \partial_i h_{io}} - \cancel{\partial_0^2 h_{00}} - \cancel{\partial_0^2 h_{00}} + \cancel{\partial_0^2 h_{00}} - \cancel{2\partial_0 \partial_i h_{io}} + \partial_i \partial_j h_{ij} - \cancel{\partial_0^2 h} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\cancel{\partial_0^2 h_{00}} + \partial_i \partial_j h_{ij} - \cancel{\partial_0^2 h} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\cancel{\partial_0^2 h_{00}} + \partial_i \partial_j h_{ij} - \cancel{\partial_0^2 h} \right\} \left[R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -R_{00} + \delta^{ij} R_{ij} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 2\partial_i \partial_j h_{ij} - 2\cancel{\partial_0^2 h} + 6\cancel{\partial_0^2 h} \right\}$$

$$= 2\partial^2 \Phi - \partial_i \partial_j h^{ij}$$