Cartan の構造方程式による曲率テンソルの計算

吉田慎一郎

2021 年 1 月 30 日

概 要

計算は物理の本質ではないが，物理理論の具体的応用には計算が不可欠である．一般相対論において面倒なのは曲率テンソルの計算である．定義通りに計算しようと思うと，まず計量の微分をして Christoffel 記号を計算し，さらにその微分や掛け算によって曲率テンソルを構成する．面倒なだけでなく，添字や縮約をとる成分の間違いなどが頻出しかねない．最近では面倒なテンソル計算は `Mathematica`™ や `Maple`™, `sympy` などを用いてコンピュータに任せることも可能だが，やはり或る程度は手計算でできることが望ましい．ここでは曲率テンソルの成分をシステマティックに計算する方法の一つを紹介する．

1 tetrad 基底

座標系 x^μ が入った時空

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu \tag{1}$$

に次の tetrad 基底（1 形式）を導入する．

$$e^{(a)} = e^{(a)}_\mu\,\mathrm{d}x^\mu \tag{2}$$

ここで，$e^{(a)}_\mu$ は係数（スカラー量），$\mathrm{d}x^\mu$ は座標基底 1 形式.

$$ds^2 = \eta_{(a)(b)} e^{(a)} \otimes e^{(b)}, \qquad \eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \tag{3}$$

また，上の tetrad に双対な基底ベクトルを定義する．

$$e^{(a)}_\mu e^\mu_{(b)} = \delta^a_b \tag{4}$$

2 Cartan の構造方程式

Cartan の構造方程式は次のように書ける[1].

$$\mathrm{d}e^{(a)} = e^{(b)} \wedge \Omega^{(a)}{}_{(b)} \tag{5}$$

$$\mathcal{R}^{(a)}{}_{(b)} = d\Omega^{(a)}{}_{(b)} + \Omega^{(a)}{}_{(c)} \wedge \Omega^{(c)}{}_{(b)} \tag{6}$$

[1] tetrad 添字 $(a),(b),(c)$ etc. についても Einstein の和の規則を適用している．

$\Omega^{(a)}{}_{(b)}$ は接続 1 形式，$\mathcal{R}^{(a)}{}_{(b)}$ は曲率 2 形式と呼ばれる．この 2 形式と Riemann テンソルをの tetrad に射影した成分 $R^{(a)(b)(c)(d)} = R^{\alpha\beta\gamma\delta} e^{(a)}_{\alpha} e^{(b)}_{\beta} e^{(c)}_{\gamma} e^{(d)}_{\delta}$ との関係は

$$\mathcal{R}^{(a)}{}_{(b)} = R^{(a)}{}_{(b)|(c)(d)|}\, e^{(c)} \wedge e^{(d)} \tag{7}$$

である．ここで，$|(c)(d)|$ は，添字を $c < d$ の場合に限って和をとることを意味する．また，tetrad 添字 (b) などの上げ下げは $\eta_{(a)(b)}$ を使って行う．

3 曲率の計算

Cartan の構造方程式を使って曲率の tetrad 成分を以下のように計算できる．

手順

1. tetrad 基底の外微分をとり，式 (5) を満たすような接続 1 形式 $\Omega^{(a)}{}_{(b)}$ を決定する．
2. 式 (6) によって曲率 2 形式を計算し，成分を読みとって Riemann テンソルの tetrad 成分とする．
3. 添字の上げ下げ（η_{ab} による），縮約をとって Ricci テンソル，スカラー曲率，Einstein テンソルなどを計算．

3.1 例：球対称静的な時空

球対称静的な時空にたいして Schwarzschild 的な座標 (t, r, θ, ϕ) を考える：

$$ds^s = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{8}$$

ν, λ は r 座標のみの関数である．ここで，tetrad 基底を次のようにとる．

$$e^{(0)} = e^{\nu} dt,\ e^{(1)} = e^{\lambda} dr,\ e^{(2)} = r d\theta,\ e^{(3)} = r \sin\theta d\varphi. \tag{9}$$

双対基底は

$$e_{(0)} = e^{-\nu} \frac{\partial}{\partial t},\ e_{(1)} = e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial r},\ e_{(2)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},\ e_{(3)} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{10}$$

3.1.1 接続 1 形式を求める

$e^{(0)}$ の外微分をとると，

$$\begin{aligned} de^{(0)} &= d(e^{\nu} dt) = de^{\nu} \wedge dt + e^{\nu} d(dt) = \nu' e^{\nu} dr \wedge dt \\ &= \nu' e^{\nu} (e^{-\lambda} e^{(1)}) \wedge (e^{-\nu} e^{(0)}) \\ &= \nu' e^{-\lambda} e^{(1)} \wedge e^{(0)} \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，$\nu' = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r}$．$d(dF) = 0$ を使った．同様に，

$$de^{(1)} = 0, \tag{12}$$

$$de^{(2)} = \frac{e^{-\lambda}}{r} e^{(1)} \wedge e^{(2)}, \tag{13}$$

$$de^{(3)} = \frac{e^{-\lambda}}{r} e^{(1)} \wedge e^{(3)} + \frac{\cot\theta}{r} e^{(2)} \wedge e^{(3)}. \tag{14}$$

式 (11) - (14) を式 (5) を見比べて $\Omega^{(a)}{}_{(b)}$ を決定すると，

$$\Omega^{(0)}{}_{(1)} = \nu' e^{-\lambda} e^{(0)} = \Omega^{(1)}{}_{(0)} \tag{15}$$

$$\Omega^{(0)}{}_{(2)} = 0, \quad \Omega^{(0)}{}_{(3)} = 0 \tag{16}$$

$$\Omega^{(1)}{}_{(2)} = -\frac{e^{-\lambda}}{r} e^{(2)} = -\Omega^{(2)}{}_{(1)} \tag{17}$$

$$\Omega^{(1)}{}_{(3)} = -\frac{e^{-\lambda}}{r} e^{(3)} = -\Omega^{(3)}{}_{(1)} \tag{18}$$

$$\Omega^{(2)}{}_{(3)} = -\frac{\cot\theta}{r} e^{(3)} = -\Omega^{(3)}{}_{(2)} \tag{19}$$

3.1.2 曲率 2 形式を求める

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(0)}{}_{(1)} &= d\Omega^{(0)}{}_{(1)} + \Omega^{(0)}{}_{(b)} \wedge \Omega^{(b)}{}_{(1)} \\
&= d(\nu' e^{-\lambda} e^{(0)}) + \cancelto{0}{\Omega^{(0)}{}_{(0)} \wedge \Omega^{(0)}{}_{(1)}} + \cancelto{0}{\Omega^{(0)}{}_{(0)} \wedge \Omega^{(0)}{}_{(1)}} + \cancelto{0}{\Omega^{(0)}{}_{(0)} \wedge \Omega^{(0)}{}_{(1)}} \\
&= d(\nu' e^{-\lambda} e^{\nu} dt) \\
&= [\nu'' + \nu'(-\lambda' + \nu')] e^{-\lambda+\nu} dr \wedge dt \\
&= [\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2] e^{-2\lambda} e^{(1)} \wedge e^{(0)}
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(0)}{}_{(2)} &= d\Omega^{(0)}{}_{(2)} + \Omega^{(0)}{}_{(b)} \wedge \Omega^{(b)}{}_{(2)} \\
&= \nu' e^{-\lambda} e^{(0)} \wedge \left(-\frac{e^{-\lambda}}{r}\right) e^{(2)} \\
&= -\frac{\nu'}{r} e^{-2\lambda} e^{(0)} \wedge e^{(2)}
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(0)}{}_{(3)} &= d\Omega^{(0)}{}_{(3)} + \Omega^{(0)}{}_{(b)} \wedge \Omega^{(b)}{}_{(3)} \\
&= \Omega^{(0)}{}_{(1)} \wedge \Omega^{(1)}{}_{(3)} \\
&= -\frac{\nu'}{r} e^{-2\lambda} e^{(1)} \wedge e^{(2)}
\end{aligned} \tag{22}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(1)}{}_{(2)} &= d\Omega^{(1)}{}_{(2)} + \Omega^{(1)}{}_{(b)} \wedge \Omega^{(b)}{}_{(2)} \\
&= d\left(-\frac{e^{-\lambda}}{r}e^{(2)}\right) + \cancelto{0}{\Omega^{(1)}{}_{(3)} \wedge \Omega^{(3)}{}_{(2)}} \\
&= d(-e^{-\lambda}d\theta) \\
&= \lambda' e^{-\lambda dr} \wedge d\theta \\
&= \frac{\lambda'}{r}e^{-2\lambda}e^{(1)} \wedge e^{(2)}
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(1)}{}_{(3)} &= d\Omega^{(1)}{}_{(3)} + \Omega^{(1)}{}_{(b)} \wedge \Omega^{(b)}{}_{(3)} \\
&= d\left(-\frac{e^{-\lambda}}{r}\right)e^{(3)}) + \Omega^{(1)}{}_{(2)} \wedge \Omega^{(2)}{}_{(3)} \\
&= d(-e^{-\lambda}\sin\theta d\varphi) + \left(-\frac{e^{-\lambda}}{r}e^{(2)}\right) \wedge \left(-\frac{\cot\theta}{r}e^{(3)}\right) \\
&= \lambda' e^{-\lambda}\sin\theta dr \wedge d\varphi - e^{-\lambda}\cos\theta d\theta \wedge d\varphi + \frac{e^{-\lambda}\cot\theta}{r^2}e^{(2)} \wedge e^{(3)} \\
&= \frac{\lambda' e^{-2\lambda}}{r}e^{(1)} \wedge e^{(3)}
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(2)}_{(3)} &= d\Omega^{(1)}{}_{(3)} + \Omega^{(1)}{}_{(b)} \wedge \Omega^{(b)}{}_{(3)} \\
&= d\left(-\frac{\cot\theta}{r}e^{(3)}\right) + \Omega^{(2)}{}_{(1)} \wedge \Omega^{(1)}{}_{(3)} \\
&= d(-\cos\theta d\varphi) + \left(\frac{e^{-\lambda}}{r}e^{(2)}\right) \wedge \left(-\frac{e^{-\lambda}}{r}e^{(3)}\right) \\
&= \sin\theta d\theta \wedge d\varphi - \frac{e^{-2\lambda}}{r^2}e^{(2)} \wedge e^{(3)} \\
&= \frac{1-e^{-2\lambda}}{r^2}e^{(2)} \wedge e^{(3)}
\end{aligned} \tag{25}
$$

3.2 Riemann テンソルの tetrad 成分

式 (7) から，Riemann テンソルの tetrad 成分を読み取ると，

$$
R^{(0)}{}_{(1)(0)(1)} = -[\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2]e^{-2\lambda} \tag{26}
$$

$$
R^{(0)}{}_{(2)(0)(2)} = -\frac{\nu'}{r}e^{-2\lambda} = R^{(0)}{}_{(3)(0)(3)} \tag{27}
$$

$$
R^{(1)}{}_{(2)(1)(2)} = \frac{\lambda'}{r}e^{-2\lambda} = R^{(1)}{}_{(3)(1)(3)} \tag{28}
$$

$$R^{(2)}{}_{(3)(2)(3)} = \frac{1-e^{-2\lambda}}{r^2} \tag{29}$$

3.3 Ricci テンソルの tetrad 成分

$$\sum_a R^{(a)}{}_{(b)(a)(c)} = R_{(b)(c)} \tag{30}$$

を使って計算する.

<u>(0)(0) 成分</u>

$$R_{(0)(0)} = R^{(1)}{}_{(0)(1)(0)} + R^{(2)}{}_{(0)(2)(0)} + R^{(3)}{}_{(0)(3)(0)} \tag{31}$$

ここで,

$$\begin{aligned} R^{(1)}{}_{(0)(1)(0)} &= \eta^{(1)(1)} R_{(1)(0)(1)(0)} \\ &= 1 \times (-1)^2 R_{(0)(1)(0)(1)} \\ &= \eta_{(0)(0)} R^{(0)}{}_{(1)(0)(1)} \\ &= [\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2] e^{-2\lambda} \end{aligned} \tag{32}$$

同様に

$$R^{(2)}{}_{(0)(2)(0)} = \frac{\nu'}{r} e^{-2\lambda} = R^{(3)}{}_{(0)(3)(0)} \tag{33}$$

よって,

$$R_{(0)(0)} = \left[\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r}\right] e^{-2\lambda} \tag{34}$$

参考文献

[1] Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A., *Gravitation*, W.H. Freeman & Company, San Francisco

[2] Wald, R.M., *General Relativity*, The Chicago University Press, Chicago and London

[3] Carroll, S.M., *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge