

2016 GR

1. 特殊相対論復習
2. 等価原理と一般相対性原理
3. 数学 (擬リーマン多様体, テンソル, 共変微分, 曲率)
4. Einstein方程式
5. 時間変化しない弱い重力場 - 重力赤方偏移, 重力レンズ, Shapiro遅延, GPS
6. Schwarzschild解とブラックホール
7. 線形摂動と重力波 - GW150914, GW151226
8. 相対論的な星
9. 相対論的宇宙論
- (10. 一般相対論の形式論 - 正準形式, Einstein方程式の3+1分解)

須藤「一般相対論入門」 日本評論社
シュッツ「相対論入門」 丸善

§ 1. 特殊相対論

- ▷ 特殊相対性原理
- ▷ "光速不変"の原理 の 2> の原理から展開.

1-1. 特殊相対性原理

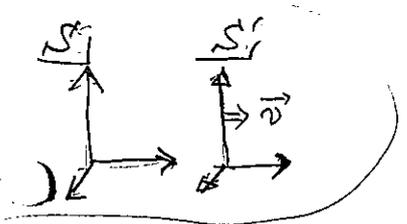
Newton力学における相対性原理 (Galileiの相対性原理)
 「慣性系」中の力学法則 (Newtonの運動法則) は
 常に同じ形に書ける.

※ 「慣性系」 = 外力の働いていない物体 が 等速直線運動
 するように観測されるような観測者の座標系.
 慣性系どうしは互いに等速直線運動する.

Newtonの運動方程式

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

(慣性)質量 加速度 力



慣性系どうしの変換 (Galilei 変換)

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

v (2つの) 形は不変

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = F' \quad (F' = F)$$

と3か" 電磁気学の法則は Galilei 変換に対して
不変ではない

⑥. 真空中での Maxwell eq.:

$$\begin{cases} \text{div } E = \rho \\ \text{div } B = 0 \\ \text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\ \text{rot } B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \end{cases} \quad c: \text{定数}$$

$$\rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0$$

波動方程式 \Rightarrow 波の位相速度

電磁波は真空中を速さ c で伝わり、

相対速度 v の Galilei 変換で結ばれた2つの慣性系で
同じ速さ c で観測？

↓
速度の合成則が成立しない $\rightarrow X$

力学だけでなく、電磁気学その他の全ての物理法則が
「慣性系」で不変となることを要請したい。

↓
Einstein の 特殊相対性原理

↓
外力の働かない物体が等速直線運動
おこなう観測者(座標系)を「慣性系」とする。

慣性系では物理法則は不変

* 「不変」 = 「適切な座標変換に対して同じ形式を保つ」

** 「物理法則」に「重力の法則」は含まれない

1-2. “光速不変”の原理

「真空中の光速はどの慣性系で測っても不変」と要請

\Rightarrow Maxwell eq. は整合

Galilei 変換 & Newton の 運動法則 $\Rightarrow X$

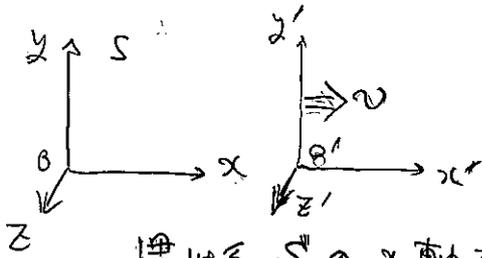
↓
これらの代替が必要。

① 「相互作用、情報の伝播する速さには有限の最大値があることを要請すれば、特殊相対性原理より、その速さ c は全ての慣性系で同一となるべき。

$\Rightarrow c$ は電磁波の速さの意味に限定されない*

* $c \rightarrow \infty$ とすると Newton 力学

1-3. Lorentz 変換



慣性系 S の x 軸方向に運動する別の慣性系 S' の x' 軸を x 軸に一致させ、また、 $t=t'$ で両者の原点 O, O' を一致させる。

$(t, \vec{x}) \rightarrow (t', \vec{x}')$ の変換 は ？

① 慣性系 \rightarrow S 系で等速直線運動する物体は

S' 系でも " " する。



L は 線型 である。

② L により光速は不変。

$\Rightarrow t=t'=0$ に $O \equiv O'$ を発した球面波の光。

$$\begin{cases} c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ c^2 (t')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \end{cases}$$

上の ①, ② から L は、

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

逆に解くと

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

1-4 事象 (event) と世界間隔 (interval)

事象 (event) は 任意の座標系で 測り、その
時刻 t , 空間座標 x で 指定される (4つの実数パラメータ)
 (t, x)

慣性系 S で 任意の事象 $A(t_A, x_A), B(t_B, x_B)$
の 世界間隔 (interval) の 2乗 S^2 を

$$S^2 \equiv -c^2(t_B - t_A)^2 + |x_B - x_A|^2$$

※. ここでは $(-+++)$
という符号系をとる
⇒ 素粒子論では
 $(+---)$ が多い

$$|x_B - x_A|^2 \equiv (x_B - x_A) \cdot (x_B - x_A)$$

Euclid 内積

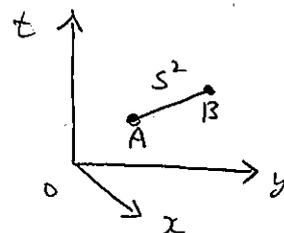
ジンスクリット ⇒ 漢語
世: 時間的広がり
界: 空間的広がり

と定義する. S^2 は 正, 0, 負. (いずれの値をとる)

※ A, B の 時間・空間的広がり が 微小をとる.

$$t_B - t_A \equiv dt, \quad x_B - x_A \equiv (dx, dy, dz)$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



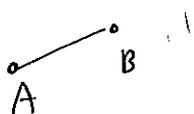
◎ 光線上の interval

光は 任意の慣性系で 同じ速さ c を持つ.

光線に沿って. $\frac{d|x|}{dt} = c \Rightarrow -c^2 dt^2 + |d|x||^2 = 0$

光の経路に沿って interval = 0

△ interval は Lorentz 変換で 不変



$$S_{AB}^2 = S'_{AB}{}^2$$

↑ ↑
S系 S'系

1-5. 便利な単位系

$$\text{interval} : ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dx, dy, dz \text{ の次元} = [\text{長さ}] = ds \text{ の次元} \\ t \quad \quad \quad = [\text{時間}] \end{array} \right.$$

事象 (t, x) の各成分の次元を統一したい

t を 長さの次元 で測りたいか？

⇒ 「1mの長さ」 = 「1mの距離を 光速 c が進むのに要する時間」
と解釈

(ex. 3.6 m ⇒ 「1mの距離を c が進むのに要する時間」の3.6倍

この時間の単位を使うと、

$$c \times \left(\text{「1mの距離を } c \text{ が進むのに要する時間」} \right) = 1 \text{ m}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{1} = 1 \quad \underline{\underline{c \text{ は } 1 \text{ となる。}}}$$

この単位系では

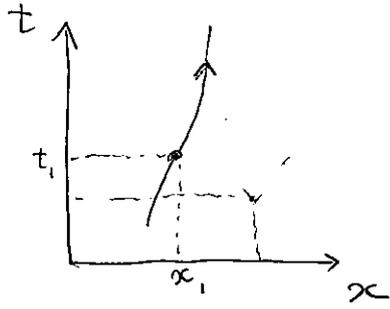
$$1 \text{ s} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = \frac{1}{2.99792458 \times 10^8} \text{ s}$$

$$\text{interval} \quad ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\frac{0}{c} = 0 \quad (\text{無次元})$$

1-6. 時空図



慣性系における時間と空間のグラフ

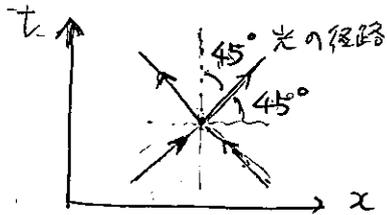
縦軸 = t

横軸 = 空間座標の1つ

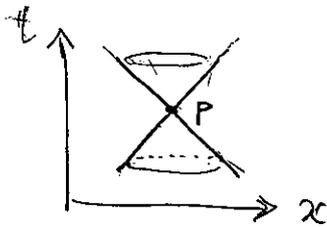
光は傾き ± 1 の直線上を進む

光より遅い物体の運動は、接線の傾きの絶対値が 1 より大きい曲線として表わせる

⇒ 物体の世界線 (world line)

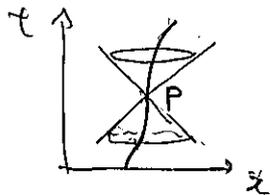


- 任意の事象 P を通過する光の伝播を表わす図形は、どの慣性系で見ても、時間軸と 45° の開き角となる "円錐" (光円錐 light cone) となる。



光線の世界線 ⇒ 双曲線 (hull) 的 曲線

- 通常の物体の速さは 1 を越えない



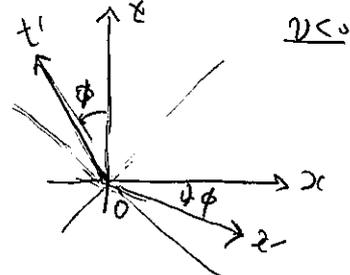
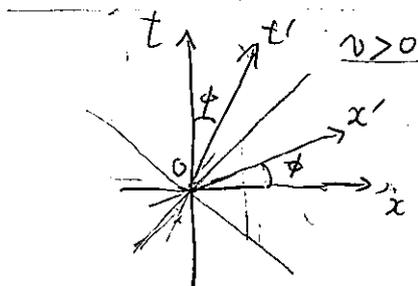
世界線は、その上の点から描いた光円錐の内部を通る

- 慣性系 S の時空図上で別の慣性系 S' はどう見えるか。 (§ 1-3)

Lorentz 変換で

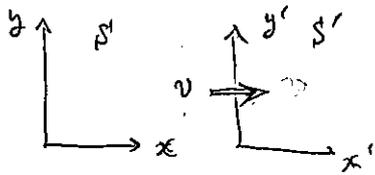
$x' = 0 \Rightarrow t'$ 軸

$t' = 0 \Rightarrow x'$ 軸

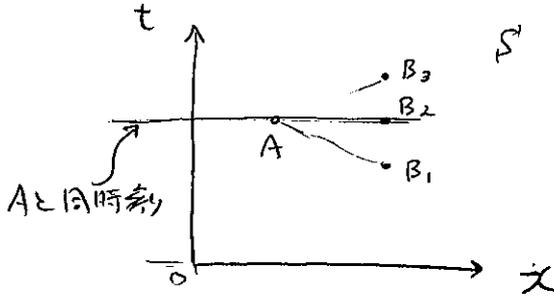


$\tan \phi = v$

1-7-1: 「同時」の相対性



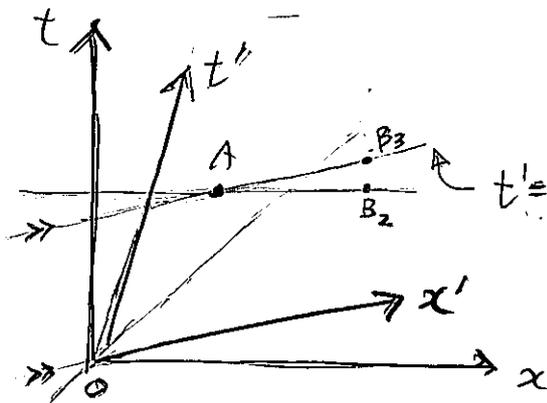
互いに運動する慣性系 S, S'
 で「同時」の概念は一致しない



S において、異なる事象 A と B_2
 は同時に起きている

↓
 S' では同じことか？

① S の時空図で見た、 S' における同時刻の曲線



↓
 $t' = \text{一定}$

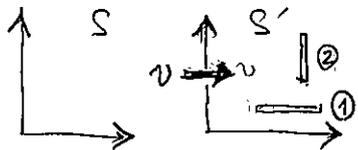
$t' = t'(A)$: S' から見た、 A と同時刻の線

$t' = \text{一定} \Rightarrow t - vx = k$ (定数)
 (傾き $\frac{1}{v}$)

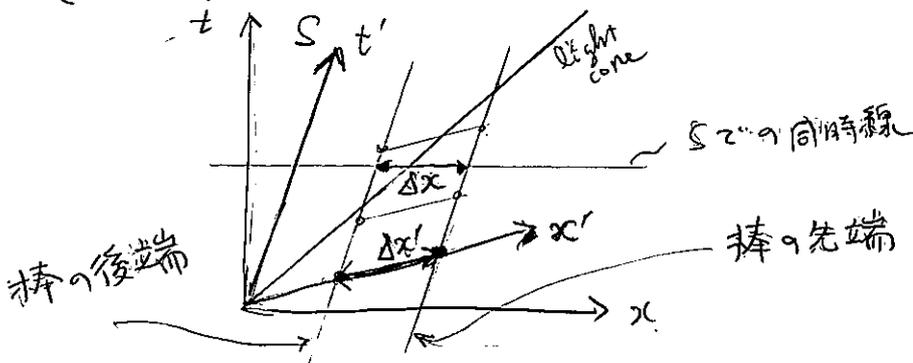
S' から見ると B_2 は A と同時に起きている

1-7-2 長さの相対性

S' 系に静止している棒の長さは S 系でどう見えるか？



① 相対速度の方向に沿って置かれた棒



① 長さを測るには、その慣性系に対し静止した物差で、その慣性系において同時に、先端と後端の位置を決定する

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\Delta t = 0 = \frac{\Delta t' + v \cdot \Delta x'}{\sqrt{1-v^2}} \Rightarrow \Delta t' = -v \cdot \Delta x'$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + v \cdot \Delta t'}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\Delta x' + v(-v \cdot \Delta x')}{\sqrt{1-v^2}}$$

Sで測った長さ

$$= \Delta x' \cdot \sqrt{1-v^2}$$

↑
S'で測った長さ

Lorentz 収縮

② 運動方向と垂直に置かれた棒は Lorentz 収縮を受けない。

1-8

速度の合成



(1) S'系での速度 $u' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ で運動する物体の S系での速度 u

S'系で物体が dt' 間に dx' を移動すると

$$\frac{dx'}{dt'} = u' \quad (dx' \equiv (dx', dy', dz'))$$

$$S系では \frac{dx}{dt} = u$$

Lorentz変換

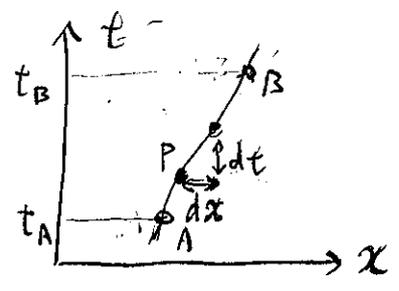
$$dt = \frac{dt' + v dx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz'$$

$$\therefore u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + v dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + v \cdot \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + v \cdot u'_x}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\frac{dt' + v dx'}{\sqrt{1-v^2}}} = \frac{u'_y \sqrt{1-v^2}}{1 + v \cdot u'_x}$$

1-9 固有時 (proper time)

物体に対して静止している時計の刻む時間はどうか



慣性系 S で見た動点 P の世界線 (t, x)

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -dt^2 + dx^2 \\
 &= -dt^2 \left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) \\
 &= -dt^2 (1 - v^2)
 \end{aligned}$$

動点 P に付随する座標系 (τ, ξ) から見ると P は静止している

$\rightarrow d\xi = 0$

$\therefore ds_p^2 = -d\tau^2 + d\xi^2 = -d\tau^2$

interval は不変なので

$ds^2 = ds_p^2 \Rightarrow d\tau^2 = dt^2 (1 - v^2)$

$d\tau = dt \sqrt{1 - v^2}$

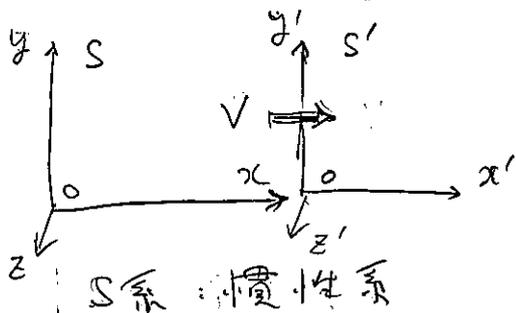
固有時 τ

P 対 事象 $A \rightarrow B$ へ移動したときの経過時間を P が測ると

$$\tau = \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - v^2}$$

となる。

11.10 等加速度運動



S系: 慣性系

S'系: x(x') 方向に等加速度直線運動

↓

意味

S'系で測った (x', t') に関して、
 $\frac{dV'}{dt'} = a$ (一定)
 $\left(\frac{dx'}{dt'} = V'\right)$

S系で (t, x) , S'系で (t', x') , に対応するときは

Lorentz 変換

$$\begin{cases} t = \frac{t' + Vx'}{\sqrt{1-V^2}} \\ x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-V^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t' (1 + V \frac{dx'}{dt'})}{\sqrt{1-V^2}} \quad \dots \quad \Delta x = \frac{\Delta t' (\frac{dx'}{dt'} + V)}{\sqrt{1-V^2}}$$

S'系での速度の増分 $\Delta V'$ (*) と S系での速度の増分と関係付ける
 (速度の合成)

$$\Delta V = \frac{\Delta V' + V}{1 + V \cdot \Delta V'} - V = \frac{(1-V^2) \cdot \Delta V'}{1 + V \cdot \Delta V'} \quad \text{--- (2)}$$

*) S'系での速度は $0 \rightarrow \Delta V'$ と増加する

\therefore ①と②より $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{(1-V^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + V \cdot \Delta V'} \cdot \frac{\Delta V'}{\Delta t'} \cdot \frac{1}{1 + V \cdot \frac{dx'}{dt'}}$

\therefore $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta t' \rightarrow 0$) とすると

$$\Delta V' \rightarrow 0, \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow \frac{dV}{dt}, \quad \frac{\Delta V'}{\Delta t'} \rightarrow \frac{dV'}{dt'}, \quad \frac{dx'}{dt'} \rightarrow V' = a$$

||
a

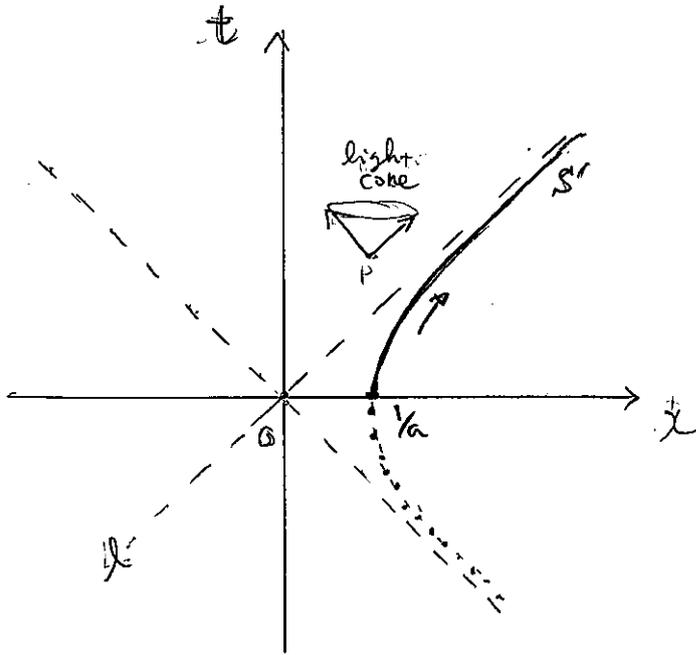
(S'系の原点はS系自身は瞬間的に静止している)

よ、 $\frac{dV}{dt} = (1-v^2)^{\frac{3}{2}} a$ — ③

③の解 $v = \frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2}}$ — ④ ($t=0$ なら $v=0$ とした)

④を積分して、

$x = \frac{\sqrt{1+a^2t^2}}{a}$ ($t=0$ なら $x = \frac{1}{a}$ とした)



時空図

$xc^2 - t^2 = \frac{1}{a^2}$

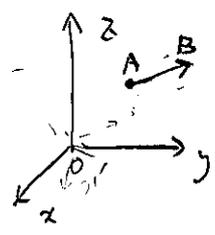
例えば点Pからの信号は永久にS'には到達しない

↓

別の曲線を見れば、情報もS'に到達するが否かの境界 (地平面, horizon)

1-11 Minkowski時空

例. 3次元 Euclid 空間



基底ベクトル: e_1, e_2, e_3

内積, ノルム: $\langle e_i, e_j \rangle$

$\vec{AB} = g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3$ と表現 (g_i : 実数)

(g_1, g_2, g_3) は $\{e_i\}$ に対する座標と見よ

一意的な表現

$$|\vec{AB}|^2 = \sum_i \sum_j g_i g_j \langle e_i, e_j \rangle$$

\vec{AB} の長さ $|\vec{AB}|$ は 基底の変換に対して不変

$$\{e_1, e_2, e_3\} \Rightarrow \{e'_1, e'_2, e'_3\}$$

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}$$

↑
直交行列

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3 \\ &= g'_1 e'_1 + g'_2 e'_2 + g'_3 e'_3 \end{aligned}$$

$|\vec{AB}|$ は不変 ことの証明 $\sum_i \sum_j g'_i g'_j \langle e'_i, e'_j \rangle = \sum_i \sum_j g_i g_j \langle e_i, e_j \rangle$

ただし $\begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$

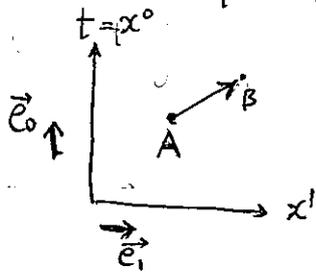
ベクトルと同様に変換する量 \Rightarrow ベクトル
 $|\vec{AB}|^2$ のように変換で不変な量 \Rightarrow スカラー
 多重線型変換を受け取る量 \Rightarrow テンソル

$$T_{i_1 i_2 \dots} = \sum_l \sum_k M_{i_1 l} M_{i_2 k} \dots T_{l k \dots}$$

④ 空間方向の基底 & 時間的"方向"の基底の4つの基底をとり

4次元空間を考える

$$\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \quad \vec{e}_1 = \mathbf{e}_1, \vec{e}_2 = \mathbf{e}_2, \vec{e}_3 = \mathbf{e}_3$$



$$\vec{AB} = x^0 \vec{e}_0 + x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3$$

$$= t \vec{e}_0 + x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

\vec{AB} の "長さ"

$$AB^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad \text{--- ①}$$

(cf. (dt, dx, dy, dz) の interval ds^2)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

AB^2 は Lorentz 変換によらず不変となる

このよきな "長さ" (距離) の定義を持つ空間 \Rightarrow Minkowski 時空

④ ①) を行列 $(\eta_{\mu\nu})$ ($\mu, \nu = 0 \sim 3$) を使った次のように書く。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

$$AB^2 = \eta_{00}(x^0)^2 + \eta_{11}(x^1)^2 + \eta_{22}(x^2)^2 + \eta_{33}(x^3)^2$$

$$= \sum_{\nu} \sum_{\mu} \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

$$= \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

* Einstein の 和の規則 (summation's rule)

上下に同じ添字 (index) があつたときは index を $0 \sim 3$ に変換させて和をとる。

$$\text{ex: } \eta_{\alpha\mu} x^{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\alpha\mu} x^{\mu} = \eta_{\alpha 0} x^0 + \eta_{\alpha 1} x^1 + \eta_{\alpha 2} x^2 + \eta_{\alpha 3} x^3$$

μ : 和の添字

α : 自由な添字

1-12-4 スカラー, ベクトル, テンソル

1-12-1 スカラー, ベクトル, テンソルの "classical" な定義

○ スカラー = Lorentz 変換において不変な量

(ex) interval $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

○ ベクトル (反変ベクトル)

Lorentz 変換により座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ と同じ形の 変換 を受ける量

$x^{\mu'} = L^{\mu'}_{\alpha} x^{\alpha}$ と可なり

of.

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$V^{\mu'} = L^{\mu'}_{\alpha} V^{\alpha}$ の形に変換される量 V^{α} ($\alpha = 0 \sim 3$) をベクトル (反変ベクトル) とする。

※ このような変換規則は物理法則の方程式が Lorentz 変換に対して形式を変えないようにするために必要である。

(ex) 4元速度 (4-velocity)

物体の Minkowski 時空内での微小変位 dx^μ ($\mu = 0 \sim 3$) を物体の固有時 $d\tau$ (定義上スカラー) で割ったもの

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (\text{物体の4元速度})$$

u^μ の "長さ" の二乗 (ノルム) はスカラー

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{(d\tau)^2} = \frac{(ds)^2}{(d\tau)^2} = -1$$

○ 共変ベクトル

Lorentz 変換の逆変換により変換される量

$$x^{\mu'} = L^{\mu'}_{\alpha} x^{\alpha} \text{ など}$$

$$\omega_{\nu'} = L_{\nu'}^{\alpha} \omega_{\alpha}$$

$$\left(L_{\nu'}^{\alpha} L^{\mu'}_{\alpha} = \delta_{\nu'}^{\mu'} \right)$$

↑ "Σ" (Einstein の和の規則)

となる ω_{α} を 共変ベクトルという

(ex) スカラー関数 $\phi(x^{\mu})$ の 4次元勾配 (gradient)

$$\omega_{\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \quad (\mu=0 \sim 3)$$

) ○ テンソル

Lorentz 変換により多重線形変換を受けり量

$$A^{\mu'\nu'} = L^{\mu'}_{\alpha} L^{\nu'}_{\beta} A^{\alpha\beta}$$

のように変換する量を 2階の反変テンソル という (4×4=16成分)

$$B_{\mu'\nu'} = L_{\mu'}^{\alpha} L_{\nu'}^{\beta} B_{\alpha\beta}$$

のように変換する量を 2階の共変テンソル という

$$C^{\lambda}_{\mu'\nu'} = L^{\lambda}_{\alpha} L_{\mu'}^{\beta} L_{\nu'}^{\gamma} C^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

) 3階の混合テンソル (4×4×4=64成分)

(ex) テンソル積

ベクトル $V^{\mu}, u^{\mu}, \omega_{\alpha}$, テンソル $T^{\mu\nu}$ などの直積

$u^{\mu} V^{\nu}$: 2階の反変テンソル

$V^{\mu} \omega_{\alpha}$: " 混合 "

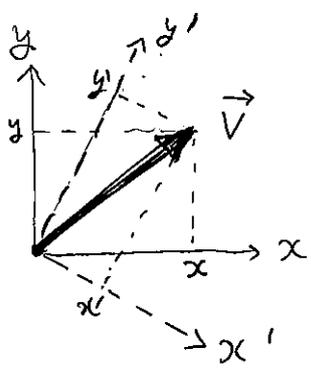
$\omega_{\alpha} T^{\mu\nu}$: 3階の "

(ex) 計量テンソル (metric tensor)

interval を定義する $\eta_{\mu\nu} \rightarrow$ 2階共変テンソル

1-12-2 ベクトル, テンソルの "modern" な見方

(1) 幾何学的なベクトル \Rightarrow 座標変換において不変
(変化するのは座標のとり方による成分)



ベクトル \vec{V} は x, y 軸 あるいは x', y' 軸を座標にとりかえおてその成分は変化するが「本体の」ベクトルは同じもの。

\rightarrow 基底の取り換えにより表示の差異

o Minkowski 時空における正規直交基底

-) 慣性系 $S: (t, x, y, z) \Rightarrow \vec{e}_{(t)}, \vec{e}_{(x)}, \vec{e}_{(y)}, \vec{e}_{(z)}$
- " $S': (t', x', y', z') \Rightarrow \vec{e}_{(t')}, \vec{e}_{(x')}, \vec{e}_{(y')}, \vec{e}_{(z')}$

それぞれ別の座標系で見ると

$$S \text{系では } \begin{aligned} \vec{e}_{(t)} &= (1, 0, 0, 0) \\ \vec{e}_{(x)} &= (0, 1, 0, 0) \\ \vec{e}_{(y)} &= (0, 0, 1, 0) \\ \vec{e}_{(z)} &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$S' \text{系では } \begin{aligned} \vec{e}_{(t')} &= (1, 0, 0, 0) \\ \vec{e}_{(x')} &= (0, 1, 0, 0) \\ \vec{e}_{(y')} &= (0, 0, 1, 0) \\ \vec{e}_{(z')} &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

) * 例えは S 系で見ると $\vec{e}_{(t')}$ の成分は $(1, 0, 0, 0)$ となる

> 基底の変換はどのように定義する?

$$\vec{V} = V^\mu \vec{e}_{(\mu)} = V^{\alpha'} \vec{e}_{(\alpha')}$$

\uparrow S 系での成分 \uparrow S' 系での成分

「成分」は $V^{\alpha'} = L^{\alpha'}_{\mu} V^\mu$ とした時のこと。

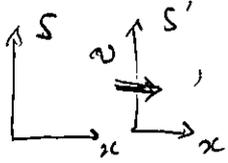
\uparrow Lorentz 変換

$$\vec{e}_{(\beta')} = L^{\nu}_{\beta'} \vec{e}_{(\nu)}$$

と 113 より 基底の " () 付き index " の

変換は成分 V^α と逆にたるとする変換すればよい。

(ex) 慣性系 S' と S の Lorentz 変換



$$L_{\alpha}^{\mu'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

のとき

$$L_{\nu'}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる

$$\vec{e}_{(t')} = L_{t'}^{\beta} \vec{e}_{(\beta)} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \vec{e}_{(t)} + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \vec{e}_{(x)}$$

$$\vec{e}_{(x')} = L_{x'}^{\beta} \vec{e}_{(\beta)} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \vec{e}_{(t)} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \vec{e}_{(x)}$$

$$\vec{e}_{(y')} = \vec{e}_{(y)}, \quad \vec{e}_{(z')} = \vec{e}_{(z)}$$

$$S \text{ 系 } \vec{e}_{(t)} = (1, 0, 0, 0), \quad \vec{e}_{(x)} = (0, 1, 0, 0)$$

となる。 S' 系での $\vec{e}_{(t')}$, $\vec{e}_{(x')}$ の成分は

$$\vec{e}_{(t')} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0 \right)$$

$$\vec{e}_{(x')} = \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0 \right)$$

<2> 基底ベクトル

一般のベクトル空間において、線型独立な任意のベクトルの組が一般の基底を作る。

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} \text{ を 正則な行列として}$$

$$\vec{u}_{(\alpha)} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \vec{e}_{(\mu)}$$

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} = \begin{matrix} & \alpha=0 & \alpha=1 & \alpha=2 & \alpha=3 \\ \begin{matrix} \mu=0 \\ \mu=1 \\ \mu=2 \\ \mu=3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \end{matrix}$$

と書ける $\vec{u}_{(\alpha)}$ ($\alpha=0 \sim 3$) の組も基底となる。

★ 座標系で \rightarrow の成分が 1 の、その他は 0 となるようなベクトルの組 $(\vec{e}_{(\mu)})$ で作られる基底を 座標基底 と呼ぶ。

> 座標基底 $\vec{e}_{(\mu)}$ の α -成分は δ_{μ}^{α} である。

> Minkowski 時空上のスカラー関数 $f(x^{\mu})$ の微分値 $\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}$ は座標基底と同じ変換をする。

$$x^{\alpha'} = L^{\alpha'}_{\mu} x^{\mu} \text{ として}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} = L^{\mu}_{\alpha'} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = L^{\mu}_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Leftrightarrow \vec{e}_{(\alpha')} = L^{\mu}_{\alpha'} \vec{e}_{(\mu)}$$

そこで、座標基底 $\vec{e}_{(\mu)} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)$ と書く notation を導入できる。

$$\left(\begin{matrix} x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ = (t, x, y, z) \end{matrix} \right)$$

$$\vec{e}_{(\mu)} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)$$

↑ ベクトルを意味する

ex. $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = (1, 0, 0, 0)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) = (0, 1, 0, 0)$$

$\{x^{\alpha}\}$ 座標系 x^{μ} のベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)$ の α 成分 $\rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)^{\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha}$

<3> 双対基底 と 1形式 (1-form)

Minkowski 時空を例にとり 一般のベクトル空間 V に対し、その双対空間 V^* (dual space) を次のような要素の集合として定義する

- V^* の要素は通常のベクトル空間の公理 (線型性) を満たす。

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\omega}, \tilde{\mu} \in V^* \\ a, b \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow a\tilde{\omega} + b\tilde{\mu} \in V^*$$

- V^* の要素は V 上の線型写像 (線型演算子)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}, \vec{v} \in V \\ \tilde{\omega} \in V^* \\ a, b \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \tilde{\omega}(\vec{u}) \in \mathbb{R} \\ \tilde{\omega}(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\tilde{\omega}(\vec{u}) + b\tilde{\omega}(\vec{v}) \end{array}$$

※ 逆に V の要素を V^* 上の線型写像と見ること可能

ベクトル空間 V の双対空間 V^* の要素を 1形式 (1-form) と呼ぶ。 (covector と)

- 双対空間の基底として、 V の座標基底 $(\frac{\partial}{\partial x^\mu}) = \vec{e}_{(\mu)}$ に対して、次の条件を満たす「双対空間の座標基底」がとれる。

$$\tilde{\omega}^{(\alpha)} \in V^*, \quad \tilde{\omega}^{(\alpha)}(\vec{e}_{(\mu)}) = \delta_\mu^\alpha$$

これを $\vec{e}_{(\mu)}$ の双対基底と見ると dx^α と書く

$$\underline{dx^\alpha(\vec{e}_{(\mu)}) = dx^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \delta_\mu^\alpha}$$

<4> 1-form の成分と座標変換

ある慣性系の座標基底により任意の 1-form を展開する:

$$\tilde{\omega} = \underbrace{\omega_\alpha}_{\text{成分}} dx^\alpha$$

* 1-form の成分は「共変ベクトル」と呼ばれるのと同じになる。(以下参照)

基底 dx^α の Lorentz 変換

慣性系 $S \rightarrow S'$ の Lorentz 変換 $L^{\mu'}_\alpha$ ($x^{\mu'} = L^{\mu'}_\alpha x^\alpha$)

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} = L_{\nu'}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

つまり: $dx^{\mu'} = Q^{\mu'}_\lambda dx^\lambda$ と Lorentz 変換と見做す

$$\begin{aligned} \text{定義より } dx^{\mu'} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \right) &= \delta^{\mu'}_{\nu'} = Q^{\mu'}_\lambda dx^\lambda \left(L_{\nu'}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \\ &= Q^{\mu'}_\lambda L_{\nu'}^\beta dx^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \\ &= Q^{\mu'}_\lambda L_{\nu'}^\lambda \end{aligned}$$

これは $Q^{\mu'}_\lambda$ の $L_{\nu'}^\lambda$ の逆、 $L^{\mu'}_\lambda$ と等しいことを示す。

$$\therefore dx^{\mu'} = L^{\mu'}_\lambda dx^\lambda$$

変換性はベクトルの成分と同じ

では 1-form の成分はどのように変換するの？

1-form $\tilde{\omega}$ はベクトル同様に座標のとりかえによる。

$$\tilde{\omega} = \omega_{\mu'} dx^{\mu'} = \omega_\alpha dx^\alpha$$

$$\omega_{\mu'} L^{\mu'}_\alpha dx^\alpha = \omega_\alpha dx^\alpha$$

$$\rightarrow \omega_{\mu'} L^{\mu'}_\alpha = \omega_\alpha \quad \text{or} \quad \omega_{\mu'} = L_{\mu'}^\alpha \omega_\alpha$$

つまり $\tilde{\omega}$ の成分は「共変ベクトル」である。

(ex.) スカラー関数 ϕ の勾配 (gradient)

21

ϕ の勾配 $\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$ と成分と対応する 1-form $d\phi$

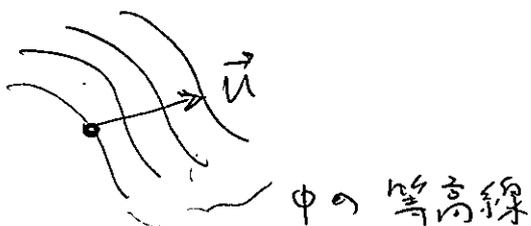
$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

> ベクトルの線形関数としての gradient の意味

$$\vec{u} = u^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \quad \text{と表す}$$

$$\begin{aligned} d\phi(\vec{u}) &= \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \left(u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} u^\beta \underbrace{dx^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right)}_{\delta^\alpha_\beta} \\ &= u^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \end{aligned}$$

) これは \vec{u} の方向に ϕ がどれだけ変化するか、を表す。



$d\phi(\vec{u}) = u^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$ は、 \vec{u} が ϕ の等高線を貫く本数を与える。

<5> テンソル

一般のテンソルは ベクトル と 1-form の直積空間から、実数 \mathbb{R} への 多重線型写像 と定義

) ex. $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{\omega}, \vec{\alpha} \in V^*$

$a, b, r, s \in \mathbb{R}$ とし

$$\begin{aligned} T(a\vec{u} + b\vec{v}, r\vec{\omega} + s\vec{\alpha}) &= ar \cdot T(\vec{u}, \vec{\omega}) + as \cdot T(\vec{u}, \vec{\alpha}) \\ &\quad + br \cdot T(\vec{v}, \vec{\omega}) + bs \cdot T(\vec{v}, \vec{\alpha}) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

T は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソル とする。

$$(T: V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{R})$$

★ テンソルの座標基底に対する成分

$\binom{m}{n}$ テンソルの座標基底は m 個のベクトル基底と n 個の双対基底の直積として構成できる

ex.) $\binom{2}{0}$ テンソル T の成分 $T^{\mu\nu}$ は次のように定義

$$T^{\mu\nu} = T(dx^\mu, dx^\nu)$$

↑ ↑
1-form 1-form

これに対する基底は $(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})$ の直積である。

$$T = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} T^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = T^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$$

↑ ↑
直積

実際. $T(dx^\mu, dx^\nu) = T^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)(dx^\mu) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)(dx^\nu)$

↑ ↑
ベクトルと 1-form の内積関数とみる

$$= T^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu$$

$$= T^{\mu\nu} //$$

ex.) $\binom{0}{2}$ テンソル G の成分表示,

$$G = G_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

一般の場合も同様

※ 直積の記号 \otimes は煩雑なので省略する = \odot 多々

$$G = G_{\alpha\beta} dx^\alpha \odot dx^\beta = G_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

> 計量: (metric) テンソル — $\binom{0}{2}$ 対称テンソル

$$\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \odot dx^\nu \quad ; \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

> ベクトルと 1-form の スカラー積
 $\vec{v} = v^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$, $\tilde{\omega} = \omega_\beta dx^\beta$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\vec{v}) &= \vec{v}(\tilde{\omega}) = \langle \tilde{\omega}, \vec{v} \rangle \\ &= \omega_\beta dx^\beta \left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) \\ &= \omega_\beta v^\alpha \cdot \underbrace{dx^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)}_{\delta_\alpha^\beta} \\ &= v^\alpha \omega_\alpha \end{aligned}$$

> 計量テンソルを介して ベクトル \Leftrightarrow 1-form の自然な対応付けができる (「添字の上が下へ」)

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \\ \eta &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \end{aligned} \right\} \rightarrow \tilde{v} \equiv \eta(\vec{v}, \cdot) \quad \text{空向}$$

$$\begin{aligned} &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu(\vec{v}) \otimes dx^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu \left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) \otimes dx^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} v^\alpha \cdot \underbrace{dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)}_{\delta_\alpha^\mu} \otimes dx^\nu \\ &= \underbrace{v^\mu \eta_{\mu\nu}}_{\tilde{v}_\nu} dx^\nu \end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l} \tilde{v}_\nu \equiv v^\mu \eta_{\mu\nu} \\ \text{と定義される係数} \\ \text{1-form} \end{array} \right]$

(0) 計量テンソル $\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ に対して

$$\vec{\eta} \equiv \eta^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) , \eta^{\alpha\beta} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1, 1 \end{bmatrix}$$

となる (2) テンソル $\vec{\eta}$ を導く

$$\tilde{\omega} = \omega_\lambda dx^\lambda \text{ に対して } \vec{\omega} \equiv \vec{\eta}(\tilde{\omega}, \cdot) = \eta^{\alpha\beta} \omega_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$$

となる $\vec{\omega}$ が自然に定義できる。

* η と $\vec{\eta}$ の成分は互いに逆 : $\eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$

例: $\vec{u} = (a, b, c, d)$ なるベクトルに対して
 $\tilde{u} = (-a, b, c, d)$ となることに注意

> 縮約 (contraction)

$\binom{m}{n}$ テンソル から $\binom{m-1}{n-1}$ テンソル に 導く 操作

ex) $R = R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\lambda} \otimes dx^{\kappa}$

$\binom{1}{3}$ テンソル \downarrow μ と λ に 縮約

$\binom{10}{2}$ テンソル $\sum_{\alpha} R(dx^{\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}},)$ (空角)

$= \sum_{\alpha} R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(dx^{\alpha}) \cdot dx^{\nu} \cdot dx^{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \right) \otimes dx^{\kappa}$

$= \sum_{\alpha} R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} \delta^{\sigma}_{\mu} \delta^{\lambda}_{\alpha} \underbrace{dx^{\nu} \otimes dx^{\kappa}}_{\text{基底}}$

$= R^{\sigma}_{\nu\sigma\kappa} dx^{\nu} \otimes dx^{\kappa}$

> 対称、反対称テンソル

成分のベクトル的添字の、任意の2つを交換したとき (1形式的)

- ・ 値が変化しない \Rightarrow 対称
- ・ 逆符号 \Rightarrow 反対称

ex. 計量テンソル η は $\binom{0}{2}$ 対称テンソル

$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$

Levi-Civita テンソル

$\binom{0}{4} : \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = \begin{cases} +1 & ((\mu, \nu, \lambda, \sigma) \text{ が } (0, 1, 2, 3) \text{ の 偶置換}) \\ -1 & (\text{ " " " " の 奇置換}) \end{cases}$

> テンソルの 対称・反対称化
 成分の添字を対称化
 反対称化

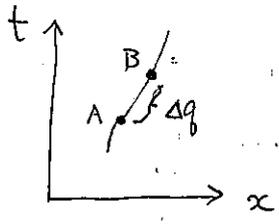
$$T^{\mu\nu} = \underbrace{\frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu})}_{\text{対称部分}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu})}_{\text{反対称部分}} \quad \text{恒等式}$$

> $F^{\alpha}_{\mu\nu}$ に対して:

$$F^{\alpha}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(F^{\alpha}_{\mu\nu} + F^{\alpha}_{\nu\mu})$$

$$F^{\alpha}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(F^{\alpha}_{\mu\nu} - F^{\alpha}_{\nu\mu})$$

> テンソルの微分



空間内任意の曲線を考え、それが
 パラメータ q で表わされるとする
 $x^{\mu} = x^{\mu}(q)$

$A(x^{\mu}(q))$, $B(x^{\mu}(q + \Delta q))$ でのテンソル $T \equiv T^{\mu}_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) \otimes dx^{\nu}$
 の差分
 (i) テンソル

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta q} \{ T(B) - T(A) \} \\ &= \frac{1}{\Delta q} \left\{ T^{\mu}_{\nu}(q + \Delta q) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)_B \otimes (dx^{\nu})_B - T^{\mu}_{\nu}(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)_A \otimes (dx^{\nu})_A \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta q} \cdot \{ T^{\mu}_{\nu}(q + \Delta q) - T^{\mu}_{\nu}(q) \} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) \otimes (dx^{\nu}) \end{aligned}$$

(Minkowski 時空で、Cartesian 座標 (t, x, y, z)
 とすると、 $\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)_A = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)_B$, $(dx^{\nu})_A = (dx^{\nu})_B$)

そこで、 $\Delta q \rightarrow 0$ とすれば、 T の微分が定義できる。

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta q} \{ T^M_{\nu}(\delta + \Delta \delta) - T^M_{\nu}(\delta) \}$$

$$= \frac{dT^M_{\nu}}{dq} = \frac{dx^{\lambda}}{dq} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T^M_{\nu}$$

$\frac{dx^{\lambda}}{dq}$ は 4元ベクトル $\frac{dx^{\lambda}}{dq} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \right)$ の成分

$$\Rightarrow \frac{dT^M_{\nu}}{dq} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T^M_{\nu} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1-form}}}{(dx^{\lambda})} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vector}}}{\frac{dx^{\lambda}}{dq} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \right)} \right)$$

つまり、

$$\frac{d}{dq} \Pi = \frac{\partial T^M_{\nu}}{\partial x^{\lambda}} \left(\underline{dx^{\lambda}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \otimes \underline{dx^{\nu}} \right) \left(\frac{dx^{\lambda}}{dq} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \right)$$

↑
このベクトルに (dx^{λ}) を作用させる

線形 $x^{\mu}(\delta)$ と $\frac{dx^{\mu}}{dq}$ は任意なので、テンソル Π の微分 $\underline{\nabla} \Pi$ は

$$\Pi = T^M_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) \otimes dx^{\nu} \xrightarrow{\nabla} \nabla \Pi = \partial_{\lambda} T^M_{\nu} \cdot dx^{\lambda} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) \otimes dx^{\nu}$$

(cf. $\partial_{\lambda} f = \frac{\partial f}{\partial x^{\lambda}}$)

とすればいい。

一般にテンソルの微分 ∇ は $\binom{m}{n}$ テンソルを $\binom{m}{n+1}$ テンソルに変える。

ex. スカラー関数 ψ の勾配

$$\nabla \psi = \partial_{\lambda} \psi \cdot dx^{\lambda} \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \text{ テンソル (1-form)}$$

ex. 計量テンソル η

$$\partial_{\lambda} \eta_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla \eta = 0 \quad (\otimes = 0 \cdot dx^{\lambda} \otimes dx^{\mu} \otimes dx^{\nu})$$

● 積分

スカラー量に重みを付けて足し合わせる操作

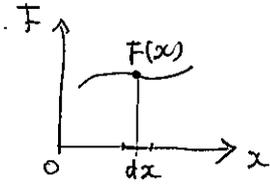
↳ 体積要素
体積素片

※ 一般のテンソル量の積分は、曲がった空間でうまく定義できない

(ex) $\vec{U} = \int_{\Omega} dV \vec{u}$ ← Euclid 空間, Minkowski 時空
 (これは可能なのだ。一般には意味をなさない)

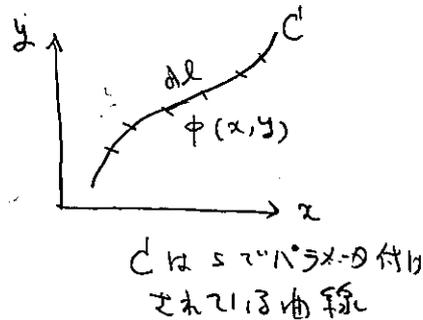
(1)

1次元 (線積分)



$$\sum F(x) dx \rightarrow \int F(x) dx$$

dx は向きをもつことに注意



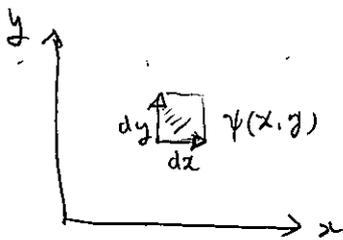
$$\sum \phi(x, y) \cdot dl = \int_C \phi(x, y) dl$$

$$= \int \phi(x(s), y(s)) \frac{dl}{ds} ds$$

dl は向きをもつ

(2)

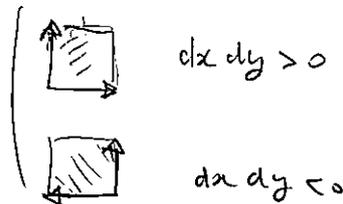
2次元 (面積分)



dx, dy の張る面積要素 dx dy

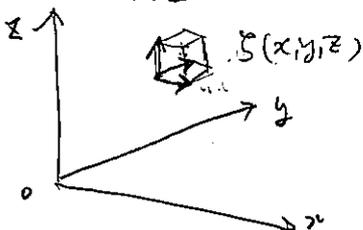
$$\sum \psi(x, y) dx dy \rightarrow \int \psi(x, y) dx dy$$

dx dy は実は向きがある



(3)

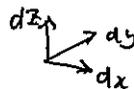
3次元



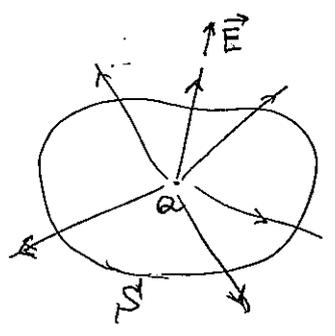
$$\sum f(x, y, z) dx dy dz \rightarrow \int f(x, y, z) dx dy dz$$

dx dy dz の"向き"

→ 右手系 or 左手系



(3) 3次元空間内の曲面上でベクトルの積分をせよ、それは？



(ex) 電磁気学の Gauss の定理

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q$$

S は 2次元曲面

$$d\vec{S} = |dS| \vec{n} \quad \vec{n} : S \text{ の法線ベクトル (3次元ベクトル)}$$

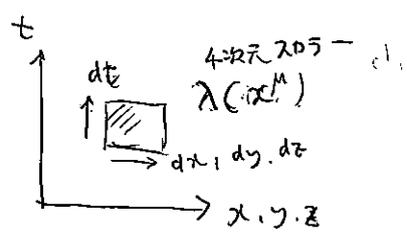
$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} |dS|$$

3次元ベクトル スカラー 面積要素

⇒ やはり スカラー 量に 面積要素 を掛けて 足し合わせる

(4) 4次元 (Minkowski 時空)

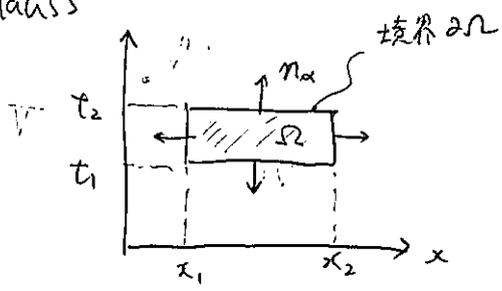
体積要素 $\rightarrow dt, dx, dy, dz$ の 向きを考慮した積



$$\sum \lambda(x^\mu) \cdot dt dx dy dz \rightarrow \int \lambda(x^\mu) \frac{dt dx dy dz}{d^4x}$$

△ “ベクトルの積分” \rightarrow Gauss, Stokes の定理

(iii) Gauss



$n_\alpha = (\Omega \text{ の向きを考慮して})$ 外向き法線の1形式
 $n_\alpha = \eta_{\alpha\mu} n^\mu$ (n^μ : 法線ベクトル)

$$\int_\Omega d^4x \partial_\mu V^\mu = \int_{\partial\Omega} dS_\alpha V^\alpha$$

$dS_\alpha = \frac{d^3S}{V} \cdot n_\alpha$ 外向き単位法線1形式
 3次元 体積要素

• 時間的、空間的、ヌルの

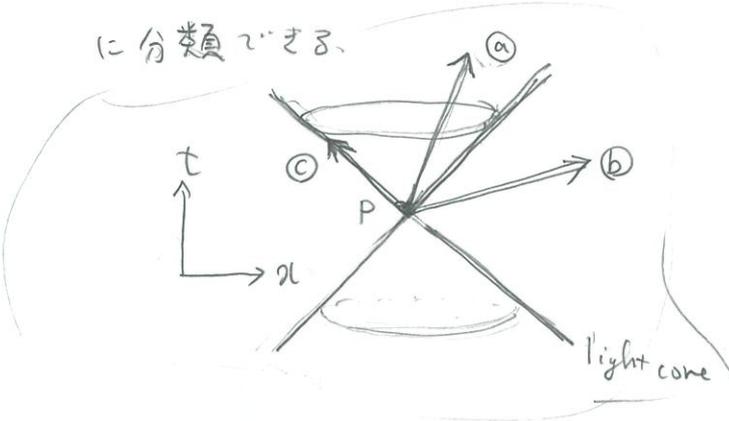
4元ベクトル v^μ はその 1/4 の符号により

時間的 (timelike) : $v^\mu v_\mu < 0$

空間的 (spacelike) : $v^\mu v_\mu > 0$

ヌルの (null) : $v^\mu v_\mu = 0$

に分類できる。



- (a) : timelike
- (b) : spacelike
- (c) : null

• 通常の物体は光速を超えて運動できない

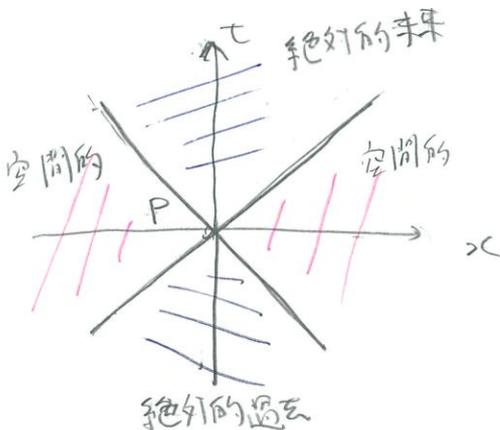
$$\Delta S^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 = -\Delta t^2 \left(1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\right) < 0$$

4元速度は timelike なベクトルになる。

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| < 1$$

• 光子 \Rightarrow null なベクトルを速度として

\Rightarrow 時空上で P と因果関係を持つ点は timelike or null の領域になる。



- \triangleright P と timelike なベクトルは成分が「正」な (互変) ベクトルで結ぶは「未来点」 (負) \Rightarrow P の絶対的将来にある (過去)
- \triangleright P と spacelike なベクトルで結ぶは「未来点」 \Rightarrow P と空間的因果関係にある。

↑ 13 4元運動量

質量 m の質点の相対論的運動量 p .

3次元の拡張として定義する

$$p^\mu = m u^\mu \quad u^\mu: \text{質点の4元速度}$$

$$(\mu = 0 \sim 3)$$

① 物体が速く動くときの4元運動量

物体の3次元速度 $(v, 0, 0)$ とする。

$$u^\mu = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, 0, 0 \right)$$

$$-1 = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\therefore u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0 \right) \leftarrow (v \ll 1 \text{ の仮定を置く})$$

$v \ll 1 (v/c \ll 1)$

$$p^\mu = m u^\mu = m \cdot \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = m v \left\{ 1 + \frac{v^2}{2} + \dots \right\} \quad v \gg \left(\frac{v}{c}\right)$$

v の3次以上を無視する

$p = m v \rightarrow$ 3次元での運動量の定義が自然な拡張

$$p^0 = m u^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m \left\{ 1 + \frac{1}{2} v^2 + \dots \right\}$$

通常の単位系では

$$p^0 = m c^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots \right\} = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots$$

- 第2項: 運動エネルギー
- 第1項: 静止(質量)エネルギー $E = m c^2$

p^0 は物体の力学的全エネルギーを表す。

* * *

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \text{ より } \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2 \text{ の関係がある。}$$

* * *

$$\text{エネルギー, 3次元運動量 } p^i \text{ として}$$

$$p^\mu = (\mathcal{E}, p^i); \quad \mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \quad p^i = \frac{m v^i}{\sqrt{1-v^2}} \Rightarrow \underline{p^\mu = \mathcal{E} v^\mu}; \quad \frac{\mathcal{E}^2 = m^2 + p^2}{(p = p^i e_i)}$$

1-14 粒子の力学

物理法則は Lorentz 変換によつて不変 (特殊相対性原理)
⇒ 物理法則の方程式の両辺は同じ型のテンソルで表わされていなければならない

3次元での質点の運動方程式

$$\frac{d}{dt} p^i = f^i$$

↓
4次元に拡張するには?

(注) (t: 絶対時間, pⁱ, fⁱ: 4次元テンソル)

$$t \rightarrow \tau, p^i \rightarrow p^\mu, f^i \rightarrow F^\mu$$

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu \quad \text{といふ可能かどうか?}$$

(p^μ: 4元運動量, F^μ: 4元力)
τ: 粒子の固有時

粒子の速さ v ≪ 1 なら τ → t, p^ν → pⁱ (3次元)

• F^μ の空間成分 (μ=1~3) は v ≪ 1 なら fⁱ (i=1~3) に帰着する
よつて定義できなければならない

• F⁰ は?

$$\frac{d}{d\tau} (\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu) = \frac{d}{d\tau} (-m^2) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{p^0 \frac{d}{d\tau} p^0}_{F^0} = \sum_{i=1}^3 p^i \underbrace{\frac{d}{d\tau} p^i}_{F^i}$$

$$\therefore F^0 = \frac{\sum_{i=1}^3 p^i F^i}{p^0}$$

v ≪ 1 なら pⁱ → pⁱ, Fⁱ → fⁱ, p⁰ → m

$$\text{よつて } F^0 \rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{p^i}{m} F^i = \sum_{i=1}^3 v^i F^i \quad (\text{力積, 仕事率})$$

• (3次元的な)外力の働かない場合

$$F^i = 0 \rightarrow F^0 = \frac{1}{p^0} \sum_{i=1}^3 p^i F^i = 0$$

このとき $\frac{d}{d\tau} p^M = 0 \Rightarrow p^M \Rightarrow$ 定数
 $\left(\begin{array}{l} p^0 \text{の保存} \Rightarrow \text{エネルギー保存} \\ p^i \text{の保存} \Rightarrow \text{運動量保存} \end{array} \right.$

1-14. 光

光は $ds^2 = 0$ とする双曲的世界線を動く。
 系の4元運動量を

$$g^M = (g^0, \mathbf{g}) \text{ とする。}$$

$$g^M = \frac{dx^M}{d\tau} \text{ とは書けない。}$$

$d\tau = 0$

∴ 固有時

この場合でも $d\lambda \neq 0$ とする λ をパラメータ λ を導入して

光の4元運動量を $g^M = \frac{dx^M}{d\lambda}$ のように書くことは可能。

光子の運動量 g^M のルネ

$$\eta_{\mu\nu} g^\mu g^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \sim \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{(d\lambda)^2} = 0$$

$$-(g^0)^2 + g^2 = 0 \Rightarrow g^0 = \pm |g|$$

$\left. \begin{array}{l} g^0 \text{ は 光子のエネルギー} \\ g \text{ は 運動量} \end{array} \right\}$ とする $g^0 > 0$

$$\rightarrow g^0 = |g|$$

cf. 量子論

光子のエネルギー	$h\omega$	}	$-\omega^2 + k^2 = 0$
運動量	$h\mathbf{k}$		

分散関係

$$h\omega \rightarrow g^0$$

$$h\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{g}$$

1-15 観測者の4元速度と光子のエネルギー・運動量

ある観測者Oの4元速度 U^μ
光子(光)の4元運動量 p^μ

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} O \text{ の観測する光子のエネルギー} &= -U_\mu p^\mu = -\eta_{\mu\nu} U^\mu p^\nu \\ \text{運動量} &= (U_\mu u^\alpha + \delta_\mu^\alpha) p^\mu \end{aligned} \right.$$

(*) 特に O の静止系で考えると $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$
(時間成分(だけ))

この座標系での $p^\mu = (\epsilon, p^i)$ とすると $(i=1\sim 3)$

$$\eta_{\mu\nu} U^\mu p^\nu = (-1) \times 1 \times \epsilon = -\epsilon$$

$$\rightarrow \epsilon = -\eta_{\mu\nu} U^\mu p^\nu \quad \text{--- ①}$$

また、

$$\begin{aligned} (U_\mu u^\alpha + \delta_\mu^\alpha) p^\mu &= (p^\mu U_\mu) u^\alpha + p^\alpha && \text{3次元のベクトル} \\ &= (-\epsilon, 0) + (\epsilon, \mathbf{p}) \\ &= (0, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

よって "3元運動量" $= (U_\mu u^\alpha + \delta_\mu^\alpha) p^\mu \quad \text{--- ②}$

①, ② はテンソル演算で定義されているので、 U^μ の任意の成分を
主座標系(Oの静止系以外)でも成立。

* $P_\alpha^\mu = U_\alpha U^\mu + \delta_\alpha^\mu$
 $P_{\alpha\mu} = U_\alpha U_\mu + \eta_{\alpha\mu}$, $P^{\alpha\mu} = U^\alpha U^\mu + \eta^{\alpha\mu}$

は、 U^μ に垂直な方向に射影する操作を表す2階テンソル
(projection tensor)

16
1-1.61

電磁気学

Maxwell 方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_e \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (c=1)$$

実は共変的だから、一見それ
と見えぬ

Maxwell 方程式の 4次元表現

電磁場テンソル: 2階, 反対称

$$F_{\mu\nu} = \begin{matrix} & \begin{matrix} t & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} t \\ x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & B^z & -B^y \\ E^y & -B^z & 0 & B^x \\ E^z & B^y & -B^x & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

4元電流

$$J^\mu = \begin{pmatrix} \rho_e \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_e \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_e$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} E^i = 4\pi J^0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} (-F_0^i) = -4\pi J^0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} F^{0i} = 4\pi J^0 \quad (\eta^{00} F_0^i = -F^{0i})$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{0\mu} = 4\pi J^0 \quad (F^{00} = 0)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} B^z - \frac{\partial}{\partial z} B^y - \frac{\partial}{\partial t} E^x = 4\pi J^x \rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} (F^{10}) + \frac{\partial}{\partial y} F^{12} + \frac{\partial}{\partial z} (F^{13}) = 4\pi J^1$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{1\mu} = 4\pi J^1 \quad (F^{11} = 0)$$

etc.

まとめ

$$\partial_\mu F^{\alpha\mu} = 4\pi J^\alpha$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} E^z - \frac{\partial}{\partial z} E^y + \frac{\partial}{\partial t} B^x = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^2} F_{30} + \frac{\partial}{\partial x^3} F_{02} + \frac{\partial}{\partial x^0} F_{23} = 0$$

$$\rightarrow \partial_{[0} F_{23]} = 0 \quad \text{etc}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

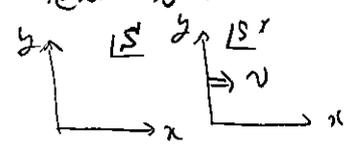
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^1} B^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} B^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} B^3 = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^1} F_{23} + \frac{\partial}{\partial x^2} F_{31} + \frac{\partial}{\partial x^3} F_{12} = 0$$

$$\rightarrow \partial_{[1} F_{23]} = 0 \quad \text{etc}$$

電と磁のc.

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \quad \left(\partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda} F_{\mu\nu} = 0 \right)$$

電磁場の Lorentz 変換



S'系がS系のx方向に速さvで運動する

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\alpha} L^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}, \quad \text{と } \Gamma-14 \text{ の } L^{\mu}_{\alpha}$$

$$L^{\mu}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \Gamma & -v\Gamma & 0 & 0 \\ -v\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

* $F^{00} = 0$
 $F^{11} = 0$

$$F^{0'1'} = L^{0'}_{\alpha} L^{1'}_{\beta} F^{\alpha\beta} = L^{0'}_0 L^{1'}_1 F^{01} + L^{0'}_1 L^{1'}_0 F^{10}$$

$$= \Gamma^2 F^{01} + v^2 \Gamma^2 F^{10} = (1-v^2) \Gamma^2 F^{01}$$

$$= F^{01} \rightarrow E^x \quad \therefore E^{x'} = E^x$$

$$F^{0'2'} = L^{0'}_0 L^{2'}_2 F^{02} + L^{0'}_1 L^{2'}_2 F^{12}$$

$$= \Gamma F^{02} - v\Gamma F^{12}$$

$$= \Gamma (E^y - vB^z) \quad \therefore E^{y'} = \Gamma (E^y - vB^z)$$

$$F^{03'} = L_0^{0'} L_3^{3'} F^{03} + L_1^{0'} L_3^{3'} F^{13}$$

$$= \Gamma \cdot F^{03} - v \Gamma F^{13}$$

$$\therefore E^{z'} = \Gamma (E^z + v E^y)$$

\vec{E} の変換をよおすと、

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} & (\text{「}\parallel\text{」は}\vec{v}\text{の運動方向と平行という意味)} \\ \vec{E}'_{\perp} = \Gamma (\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) & ; \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases}$$

同様に $B'_{\parallel} = B_{\parallel}, B'_{\perp} = \Gamma (B_{\perp} - v \times E)$ となる。

● 不変量

$F^{\mu\nu}$ から 2 つの Lorentz 不変なスカラー量を作れる

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 (\vec{E} \cdot \vec{E} - \vec{B} \cdot \vec{B})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = 4 \vec{E} \cdot \vec{B}$$

Levi-Civita

3次元 Euclid 内積

● 電磁ポテンシャル

古典電磁気学は (3次元) スカラーポテンシャル ϕ と (3次元) ベクトルポテンシャル A^i ($i=1,2,3$) を用いて記述できる。

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

対応する 4次元表示は?

\Rightarrow 4元電磁ポテンシャル

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad ; \quad A_\mu = (-\phi, \vec{A}) \quad (A_0 = \eta_{0\nu} A^\nu = -A^0)$$

\uparrow \ominus 符号に注意

すると、 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ex. } E^x = F_{10} = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 = -\partial_x \phi - \partial_t A^x \\ B^z = F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \partial_y A^z - \partial_z A^y \end{array} \right.$$

* A^μ の Lorentz 変換

$$A^{\mu'} = L^{\mu'}_{\alpha} A^\alpha$$

• Lorentz 力

電荷 q に働く Lorentz 力の 3次元表現

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を 4次元での Lorentz 不変性を用いて明瞭な形式にしよう。

* 左辺は $\frac{dp^\mu}{d\tau}$ になるように $p^\mu = (E, \mathbf{p})$
 $\tau = \text{固有時}$

空間成分

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dp^i}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$= q(u^0 \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$u^\mu = (u^0, \mathbf{u})$: 電荷の 4元速度

時間成分

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}$$

↓
電場の仕事率

$$\therefore \frac{dp^\mu}{d\tau} = (q \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}, q(u^0 \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}))$$

$$= q F^\mu{}_\nu u^\nu$$

$$\left[\begin{array}{l} (\neq 0 \text{ 成分}) : q F^0{}_\nu u^\nu = \sum_{j=1}^3 q E^j u^j = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} \\ (\neq 1 \text{ 成分}) : q F^i{}_\nu u^\nu = q E^i u^0 + q B^z u^y - q B^y u^z \\ \qquad \qquad \qquad = q (u^0 E^i + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})^i) \end{array} \right]$$

7-17 古典場の Lagrange 形式

of. 粒子の力学の Lagrange 形式

$(q^i$: 粒子の一般化座標
 $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$: 速度

$$L = L(q^i, \dot{q}^i) \quad \text{Lagrangian}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q^i, \dot{q}^i) \quad \text{作用 (action)}$$

変分原理 \Rightarrow Euler-Lagrange 方程式 (Newton の運動方程式と等価)

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

ex. $L = \frac{m}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{k}{2} \phi^2$: 質量 m , バネ定数 k の調和振動子

電磁気学における場と変数とある場合の共変的理論は?

$\phi(t, x^i)$
↑ 時空の座標は一般化座標ではない (単座標系)
↑ 場の量が一般化座標であると考える。

場の変数 $\phi(t, x^i)$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \iff L = L(\phi, \dot{\phi})$$

Lagrangian 密度
(空間積分すると Lagrangian とする)
↑ 時間と空間に
対称な振る舞い。
 $\dot{\phi}$ に相当する

$$\text{作用 } S = \int_{\Omega} dt d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \iff S = \int dt L(\phi, \dot{\phi})$$

(積分と定義域) 時空間にわたる積分。

$$\text{変分 } \delta S = \int_{\Omega} dt d^3x \delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi, \mu}$ は \mathcal{L} の ϕ, μ に
ついての偏微分

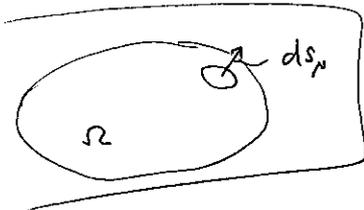
★ $S = \int_{\Omega} dt d^3x \mathcal{L}(\phi; \phi_{,\mu}) \quad \phi_{,\mu} = \partial_{\mu}\phi$

$$\begin{aligned} \delta S &\equiv \int_{\Omega} dt d^3x \delta \mathcal{L}(\phi; \phi_{,\mu}) \\ &= \int_{\Omega} dt d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi_{,\mu} \right) \\ &= \int_{\Omega} dt d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \partial_{\mu} \delta \phi \right) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \delta \text{ と } \partial_{\mu} \text{ は可換なため} \\ \delta \phi_{,\mu} = \partial_{\mu} \delta \phi \end{array} \right)$$

$$= \int_{\Omega} dt d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi \right) - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \delta \phi \right)$$

∴ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \right)} \delta \phi = h^{\mu} \quad \text{と認る} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\mathcal{L}}{\left(\frac{\phi}{x^{\mu}} \right)} \sim \frac{\mathcal{L}}{\phi} x^{\mu} \propto \text{上の項} \end{array} \right.$

②項 $= \int_{\Omega} dt d^3x \partial_{\mu} h^{\mu} = \int_{\partial \Omega} dS_{\mu} h^{\mu}$



dS_{μ} : Ω の境界の面積素片

境界で $h^{\mu} \rightarrow 0$ ($\delta \phi \rightarrow 0$)



$= 0$

∴ $\delta S = \int_{\Omega} dt d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \right] \delta \phi$

任意の $\delta \phi$ に対して $\delta S = 0$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) = 0$$

スカラー場 ϕ
+ 質量 \Rightarrow 2PI 4 $V(\phi)$ 不可避!

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

\rightarrow mass term
of K-G eq

$$\rightarrow \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad \text{or} \quad \square \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0$$

電磁場

一般化座標 $\Rightarrow A^\mu$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 4\pi A_\mu J^\mu$$

$$\rightarrow \partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu$$

*) $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\rightarrow \frac{\partial F_{k\lambda}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \delta^{\mu}_k \delta^{\nu}_\lambda - \delta^{\mu}_\lambda \delta^{\nu}_k$$

$$\therefore \frac{\partial (F_{\mu\lambda} F^{k\lambda})}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\lambda} \left[(\delta^{\mu}_\alpha \delta^{\nu}_\beta - \delta^{\mu}_\beta \delta^{\nu}_\alpha) F_{k\lambda} + (\delta^{\mu}_k \delta^{\nu}_\lambda - \delta^{\mu}_\lambda \delta^{\nu}_k) F_{\alpha\beta} \right]$$

$$= 4 F^{\mu\nu}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$$

また $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 4\pi J^\mu$

\therefore Euler-Lagrange eq. $\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu$

*) Maxwell 方程式の $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu$

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$$

は $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と A_μ を使って表現すれば自動的に満たされる

18
1-24

エネルギー-運動量テンソル

(energy-momentum tensor / stress-energy tensor)

cf. 質点のエネルギー ϵ と運動量 \mathbf{p} $\rightarrow p^\mu = (\epsilon, \mathbf{p})$

電荷 ρ_e と電流密度 \mathbf{j} $\rightarrow j^\mu = (\rho_e, \mathbf{j})$

電磁場 \mathbf{E} & \mathbf{B} $\rightarrow F^{\mu\nu}$

\Rightarrow 3次元の量をよびあて 4次元テンソルの成分とみる。

① 「エネルギー」「運動量」「力」を統合したい

\rightarrow エネルギー-運動量テンソル

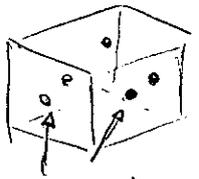
(A) ガスト

ある慣性系 S' で静止している、相互作用のない粒子の集団

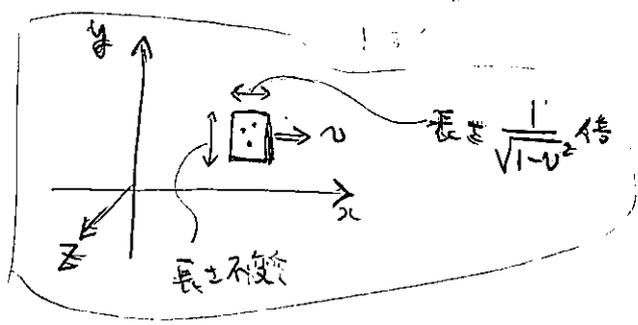
\Rightarrow ガスト (dust)

S' 系で単位体積あたり n 個の粒子

他の慣性系 S から見て、 S' が x 方向に速さ v で運動



互いに静止



Lorentz 収縮より S の観測する
粒子密度は $\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}$ ①

x軸と垂直な面上で

単位時間・単位面積あたりに通過する
粒子数 (流束, flux)

$$\frac{n}{\sqrt{1-v^2}} v \quad \text{--- ②}$$

①, ② は 4元ベクトルの成分と見なせる。

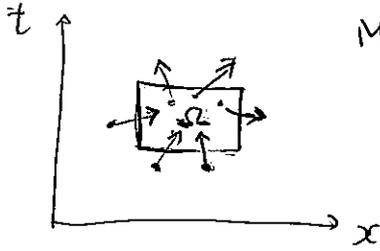
4元
流束ベクトル

$$M^\mu \equiv \left(\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{n}{\sqrt{1-v^2}} v^i \right); \quad v^2 \equiv \sum_{i=1}^3 (v^i)^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{上の場合} \\ v^2 = v^3 = 0 \end{array} \right)$$

$= n U^\mu$; U^μ : ガストの静止系 S' の4元速度

(S 系で見た成分数
 $n^\mu = (n, \mathbf{0})$)

• 流束ベクトルの保存



Minkowski時空の領域 Ω を出入りする粒子の流束の表面積分

$$\oint_{\partial\Omega} dS_\mu n^\mu = \int_{\Omega} d^4x \cdot \partial_\mu n^\mu \quad (\text{Gauss})'$$

粒子の生成=消滅はないとする。

$\Rightarrow \Omega$ への出入りの総数をカウントすると 0

$$\therefore \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu n^\mu = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\partial_\mu n^\mu = 0} \quad (3)$$

• 質量密度保存

1粒子の質量を一定(m)とすると $m n^\mu$ が 質量密度の流束ベクトル

$$m \partial_\mu n^\mu = \underline{\partial_\mu (m n^\mu) = 0} \quad (4)$$

□ エネルギー密度 \mathcal{E}

$$S系から見ると, $\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \times \frac{n}{\sqrt{1-v^2}}$$$

(粒子1個の力学的エネルギー) $\frac{m\eta}{1-v^2} \quad (5)$ (S系での粒子密度)

これは $m n (u^0)^2$ と書ける。

$\rho \equiv m n$ (S系での静止系 S' での質量密度)

それと

(2.10) テンソル $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ を定義すると \mathcal{E} は その (0,0) 成分となる。

$$\textcircled{6}$$

* $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$

• $T^{\mu\nu}$ の意味 (S系で見える)

▷ T^{0i} ($i=1,2,3$)

$$T^{0i} = \rho u^0 u^i = \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{v^i}{\sqrt{1-v^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{体積の Lorentz 因子}} \cdot \underbrace{\rho v^i}_{\text{S系での単位体積に 入っている粒子の 運動量}}$$

⇒ 運動量密度 (i方向の成分)

あるいは、見方を変えると、

$$T^{0i} = \rho u^0 u^i = \underbrace{\rho}_{\text{エネルギー密度}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{体積の Lorentz 因子}} \cdot \underbrace{v^i}_{\text{i方向への速度}}$$

⇒ エネルギー密度の流束 (i方向)

▷ T^{ij} ($i, j=1,2,3$)

$$T^{ij} = \rho u^i u^j = \underbrace{\frac{\rho v^i}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{i方向の 運動量密度}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{体積の Lorentz 因子}} \cdot \underbrace{v^j}_{\text{j方向への速度}}$$

⇒ i方向の運動量密度のj方向への輸送率
or j方向に垂直な面を通りi方向に働く力 (応力)

※ i と j を入れ換えた解釈も等価

▷ T^{00}

エネルギー密度

まとめ

$$T^{\mu\nu} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \epsilon & p^1 & p^2 & p^3 \\ p^1 & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ p^2 & \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ p^3 & \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ϵ : エネルギー密度

p^i : 運動量密度 または エネルギー密度の流束

σ^{ij} : 応力

このように、物質場のエネルギー・運動量密度、応力を成分として

まとめられた物理量を エネルギー・運動量 (エネルギー・運動量) テンソル といい

※ 2階対称である。

(B) 完全流体 (粘性, 熱の散逸が無い)

S' 系で: 応力は垂直応力(圧力)のみ

$$\sigma^{ij} = p \delta^{ij} \quad p: \text{圧力}$$

エネルギー密度を ϵ とし,

(S' 系) $T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$

→ S 系では $T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + p \eta^{\mu\nu}$

(c) 電磁場

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (F^\mu_\lambda F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})$$

● 保存則

・ ダスト $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ ($\rho = m \cdot n$)

$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu (\rho u^\mu u^\nu) = \rho u^\nu \partial_\nu u^\mu + u^\mu \partial_\nu (\rho u^\nu)$

※ 2項は質量保存④より $\partial_\nu (\rho u^\nu) = 0 \Rightarrow 0$

※ 1項は $u^\nu \partial_\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{d}{d\tau}$ より

$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \rho \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$

外力が働かない場合 $\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = 0$ (粒子の4元加速度 = 0)

$\therefore \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$

・ 同様に、完全流体外、単独にある場合 (外力なし), 電磁場のみがある場合なども

$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ が成立

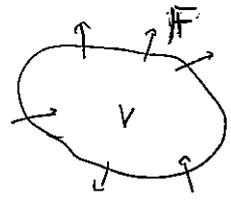
$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ の意味

$\mu=0$ $0 = \partial_\nu T^{0\nu} = \frac{\partial}{\partial t} T^{00} + \frac{\partial}{\partial x^1} T^{01} + \frac{\partial}{\partial x^2} T^{02} + \frac{\partial}{\partial x^3} T^{03}$

$= \frac{\partial}{\partial t} [\text{エネルギー密度}] + \text{div} [\text{エネルギー流束}]$

\rightarrow エネルギー保存則

$$\left[\begin{aligned} 0 &= \int d^3x \cdot \partial_\nu T^{0\nu} = \int d^3x \frac{\partial}{\partial t} \epsilon + \int d^3x \cdot \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \epsilon d^3x &= - \oint_{\partial V} dS_j \cdot \mathbf{F}^j \end{aligned} \right]$$



$\mu=i$ \rightarrow 運動量保存則

1-22 19 粒子の運動の作用積分

自由粒子の方程式と導く作用

cf. Newton 力学

作用 $I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) \xrightarrow{d} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

Euler-Lagrange eq.

$L = T - U$

↑ ↑
kinetic potential

特に自由粒子のときは $L = T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad (\dot{q} = \frac{dq}{dt})$

相対論的運動と粒子の作用は？

- 慣性系 $S(t, x)$ で見たとき

$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$

この形で、 L は 速度 $(\frac{dx}{dt})$ の 2 次 の 項 を 含 む

- I は スカラー 量 (Lorentz 不変)

という条件で最も簡単なものは

$L = -m \sqrt{1-v^2} \quad v = \frac{dx}{dt}$

∴ 粒子の固有時 τ

$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2(1-v^2)$

$\rightarrow d\tau = \sqrt{1-v^2} dt$

$I = \int -m \sqrt{1-v^2} dt = \int -m d\tau$ (スカラー!)

非相対論極限 ($v \ll 1$) のとき

$L = -m(1-v^2)^{\frac{1}{2}} \approx -m + \frac{m}{2} v^2$

(定数項は変分計算で 0)

このとき

$$\delta L = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} \right) = 0$$

↑
運動量

○ 電磁場中の荷電粒子の作用

電荷 e をもつ粒子が電磁場中で運動

→ 自由粒子の作用にポテンシャル項を加える

↓
電磁場ではベクトルポテンシャル A_μ

作用がスカラーであることも必要 (A_μ の S スカラーを必要)

$$I = \int -m d\tau - e A_\mu dx^\mu$$

$$= \int - (m + e A_\mu U^\mu) d\tau$$

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (\text{4-velocity})$$

を採用.

静電ポテンシャル

$$I = \int - \left(m\sqrt{1-v^2} - e\phi + e A_i \frac{dx^i}{dt} \right) dt$$

← L

$$\left(\begin{aligned} A^\mu &= (\phi, A) \\ \Rightarrow A_\mu &= (-\phi, A) \end{aligned} \right)$$

これを変分すると

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\left(\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \right)$$

また、正準運動量 \mathbf{P}

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$

§2 一般相対論の導入

2-1 等価原理 (equivalence principle)

(2-1-1) 弱い等価原理 (Weak Equivalence Principle)

物体に働く Newton 重力
 $-m_g \cdot \nabla \Phi$
 ↑ potential
 ↑ 物体の重力質量

物体の慣性項 (慣性質量 m_i)
 $m_i \cdot a$
 ↑ 加速度

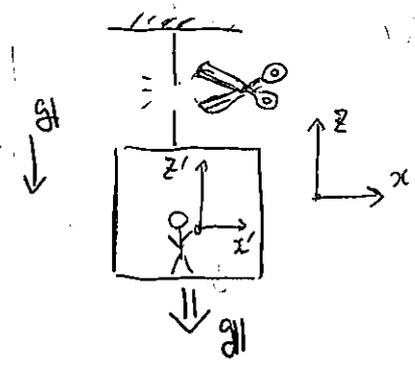
運動方程式

$$m_i a = -m_g \nabla \Phi$$

$m_i = m_g$ は自明でなし (cf. 静電力
 $m_i a = -\frac{e}{m} \nabla \Phi_E$ (静電ポテンシャル)
 $\frac{e}{m_i}$ は任意にとれる)

▷ WEP: $m_i = m_g$ を要請
 → $a = -\nabla \Phi$

この原理の下では物体に働く重力の効果はその質量や組成によらず
 → 重力加速度を打ち消す運動をする観測者には重力は消えてしまふように見える。



$g = |\nabla \Phi|$ とする。

箱の外の観測者 (x, z)
 $m \ddot{z} = -mg$ ($\dot{z} = \frac{dz}{dt}$)
 → $\ddot{z} = -g$

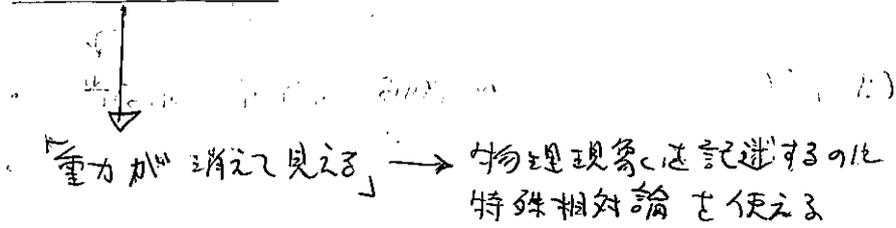
箱の中の観測者 (x', z')
 $z' = z + \frac{1}{2}gt^2$
 → $\ddot{z}' = \ddot{z} + g$
 ⇒ $\ddot{z}' = 0$ (重力加速度は消える)

* この原理は Eötvös の実験等で検証

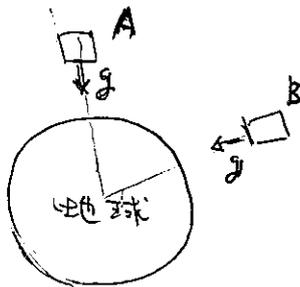
(2-1-2) Einstein の 等価原理 (EEP)

WEP: 重力質量と慣性質量の等価性

→ 重力が消えて見える観測者 (加速運動する) が存在.



- ただし、重力を消せる観測者の存在領域は 時間、空間的に限定される



- A の位置での自由落下運動は B での重力を消せたら
- また、自由落下運動は時間的にも限定される。

◎ Einstein の 等価原理 (Einstein's Equivalence Principle)

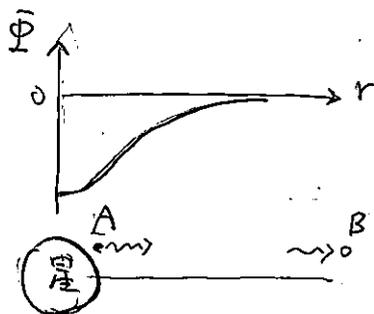
|| 時間、空間の局所的領域では重力を打ち消すことができ、
 || そこでは特殊相対論によって物理が記述される。 ||

EEP によれば、加速運動と重力を局所的 (local) に区別できない。

(2-1-3) 重力赤方偏移 (gravitational red shift)

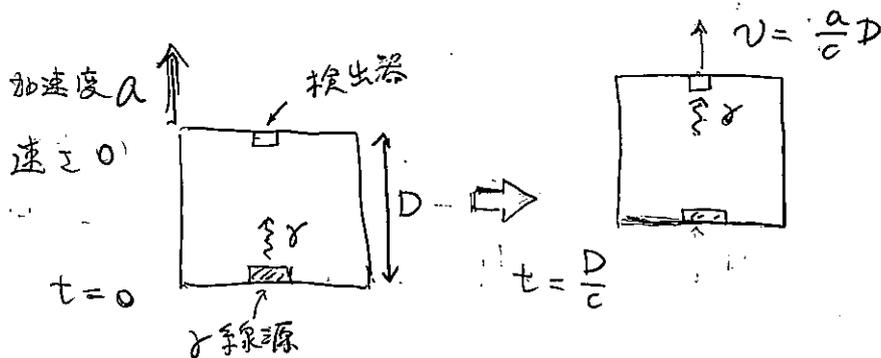
EEP ⇒ 重力の強い (重力ポテンシャルの深い) 所から来る光は赤方偏移する。

⇒ 重力の強さによって時間の進み方が変わる



A での波長 λ_A の光が
 B での波長 λ_B
 $\lambda_A < \lambda_B$
 (振動数 $\nu_A > \nu_B$)

一様加速運動の箱



γ 線発射時の振動数 ν_0

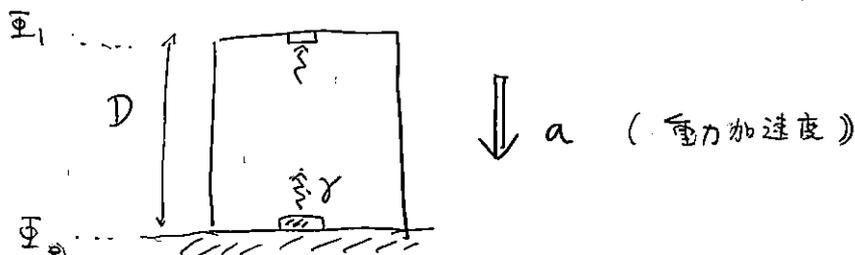
検出器 $\ll \nu_1$ (検出器は $v = \frac{a}{c}D$ だけ遠ざかる)

$$\nu_1 = \nu_0 \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu_0 \left(1 - \frac{a}{c^2}D\right) \quad (1)$$

(Doppler効果)

EEP より、上の実験は以下と等価

cf. Pound & Rebka (1960)

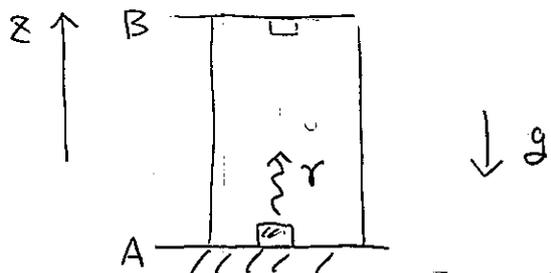


γ 線源での重力ポテンシャル Φ_0
 検出器 Φ_1 とすると、

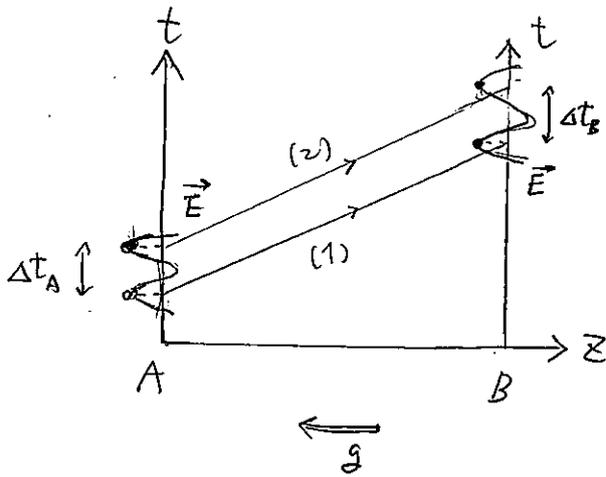
$$a = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{D}$$

$$(1) \text{より } \nu_1 = \nu_0 \cdot \left(1 - \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{c^2}\right) < \nu_0 \quad (\Phi_1 > \Phi_0 \text{ のとき})$$

これはまた、重力ポテンシャルが Φ_0 にある点での時間の進み方が Φ_1 での時間の進み方より遅いことを示す。



静的 (時間変化しない) 一様重力場
 時間変遷対称



Aにある振動子から発する光 (振動数 ν_A) の電場 E の「山」と「山」の時間間隔 Δt_A

$$\Delta t_A = \frac{1}{\nu_A}$$

Bにある検出器での電場の「山」と「山」の間隔は?



光の進路は (1) と (2) は図上で平行移動すれば「重なるはず」(時間並進対称性)



$$\Delta t_B = \frac{1}{\nu_A} \text{ (?)}$$

ところが、実際は $\Delta t_B = \frac{1}{\nu_B}$ (Bでの振動数)

$$\text{つまり、} \Delta t_B = \frac{1}{\nu_B} > \frac{1}{\nu_A} = \Delta t_A$$

結論 ①

振動子 A は B から見るよりも、より振動しているように見える

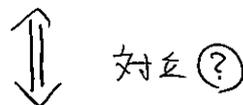
⇒ A での時間の進み方は B での進み方が遅い

② A, B に静止した時計は同期で走らな

→ この系は Minkowski 時空では記述できない

一般に重力場中で「大域的な慣性系」は、

とれない ⇒ Minkowski 時空ではな



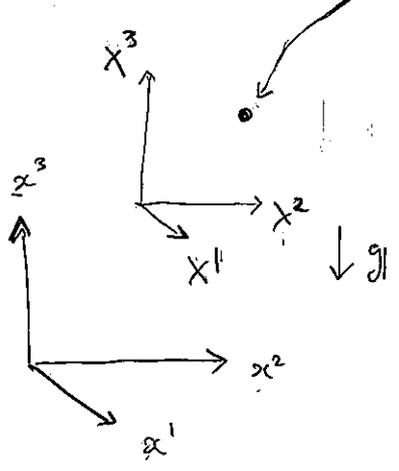
一方で、自由落下系は 局所的に Minkowski と同一 (EEP)

③ Minkowski 時空 (3次元 Euclid 空間を 4次元化した、「平坦な」時空) を 局所近似 として持つおな、曲がった時空の理論が必要

(決定) Riemann 幾何学

(2-1-4) 質点の運動方程式

重力以外の力の働かない質点



X^μ : 重力場内で自由落下する座標系 : S_F
 x^μ : 一般の座標系 (ex. 地球に固定された系) : S_G

質点の"位置"座標 X^μ or x^μ

$X^\mu = X^\mu(x^\alpha)$ $\vec{x} = x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)$

仮定 (自由落下系での質点に外力が働いていない(自由粒子))
 EEP

S_G での質点の運動 \rightarrow 等速直線運動

$\frac{d^2}{d\tau^2} X^\mu = 0$

(τ : 質点の固有時
 $|d\tau^2 (= -ds^2)| = -\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$
 Minkowski 計量)

$\frac{d}{d\tau} X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

$0 = \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right] = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \cdot \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

$= \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \right] \cdot \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

$\downarrow \times \frac{\partial x^\beta}{\partial X^\mu} \quad \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial X^\mu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\beta \text{ に注意} \right)$

$0 = \frac{d^2}{d\tau^2} x^\beta + \frac{\partial x^\beta}{\partial X^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \right] \cdot \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$

これは S_F で見れば
 同じ粒子の運動方程式

$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$

* $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$
 $\therefore \partial_\rho (\partial_\alpha X^\mu) = \partial_\alpha (\partial_\rho X^\mu)$ 53

世界間隔
一方、interval ds^2 は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta$$

$$= \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta$$

\equiv
 $g_{\alpha\beta}$

(\ast : $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$)

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

また、重力場(か)に働く質点の運動 $x^\gamma = x^\gamma(\tau)$ を、一般の(自由落下している)

座標系で記述する式は

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

また、この座標での interval は

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

(2) 擬 Riemann 空間 (pseudo-Riemannian space)

座標 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ の重力場? 記述には Minkowski 時空と同様に必要. (ex. (t, x, y, z)) の関数)

\Rightarrow 幾何学的な量で書ける

⑥ 一般の時空 (Minkowski の拡張)
(数学的に記述した)

座標 = 時空内の点と
対応する 4 つの
数の組

\Rightarrow 多様体

という 2次元... 空間

ds^2 が 正定値 である \Rightarrow Riemann 空間

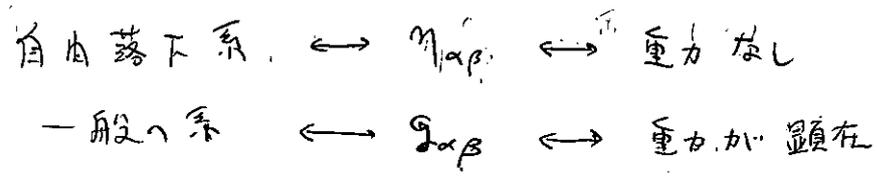
\leftarrow ex. 3次元 Euclid 空間

" " である \Rightarrow 擬 Riemann 空間

\leftarrow 時空

自由落下系: $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ $\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$
 \downarrow
 $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ $(g_{\alpha\beta} \neq \eta_{\alpha\beta})$

逆に: $g_{\alpha\beta}$ が interval を定義する量 として、最初から与えられた空間を記す



$\rightarrow g_{\alpha\beta}$ に重力の情報が含まれている。

2-2 一般相対性原理

一般相対論を展開するためのもう一つの原理

「物理法則(重力も含む)は 一般座標変換 に対して その形を変えない」
 \Downarrow

Q: この要請を満たす量は何か?

また、この量を用いて物理法則はどのように表されるべきか

A: 特殊相対論におけるテンソル(スカラー, ベクトルも含む)を拡張する。

テンソルの間の関係式

(ある階数のテンソル) = (左辺と同じ階数のテンソル)

§3 多様体上の微分解析

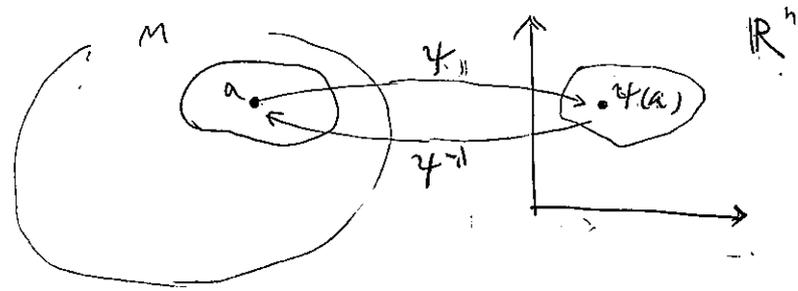
> 多様体

連続

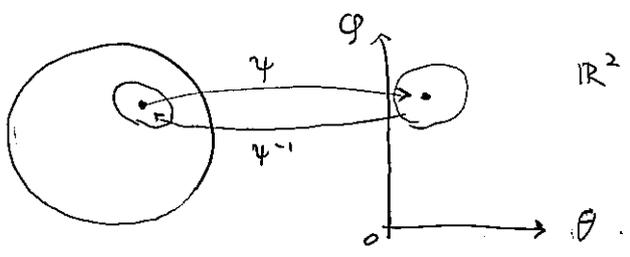
"それら含まれる要素 $a \in M$ に対して \mathbb{R}^n によるパラメータ付けられているよる集合"



集合 M の任意の要素 $a \in M$ を含む開部分集合から \mathbb{R}^n (n は或る自然数) の開部分集合への連続 1対1 写像が存在する



ex.



2次元球面 S^2
 $M=2$ (2次元)

ex.

一般線型群 $GL(n, \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \det A \neq 0 \\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{array} \right) \rightarrow A \in GL(2, \mathbb{R})$$

$$GL(n, \mathbb{R}) \xrightleftharpoons[\psi^{-1}]{\psi} \mathbb{R}^{n^2}$$

n^2 次元の多様体

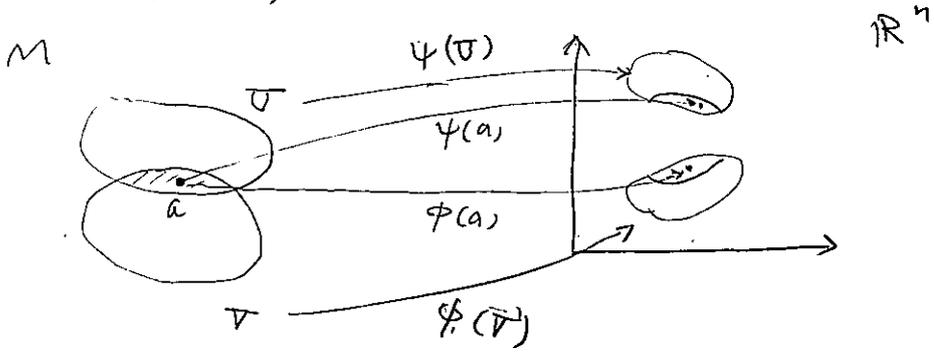
多様体の開集合 $\longleftrightarrow \mathbb{R}^n$ の開集合
 の写像とその定義域の組
 \Downarrow
 chart (「地図」の意)

} \Rightarrow 多様体の点の座標を与える.

多様体全体を1つの chart で「覆う」とは一般にできない

(ex.) 地球の表面の点 \longleftrightarrow 2次元平面
 Mercator 図法 \Rightarrow 必ず singular な点がある.

一般には chart を複数用意して多様体全体を覆うことを考える. (Atlas)



「chart が重なるとなると、辻褄が合うようにしたい」

$$\psi(a) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\phi(a) = (y^1, y^2, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n \quad a \in U \cap V$$

$$(y^1, y^2, \dots, y^n) = \phi \circ \psi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad \text{となる.}$$

この $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の関数 $\phi \circ \psi^{-1}$ が C^1 級 (連続1回微分可能) となる.

C^1 級 (連続1回微分可能) のとき.

M を可微分多様体 (differentiable manifold) とする.

時空の数学的モデルとして多様体を導入するとは、

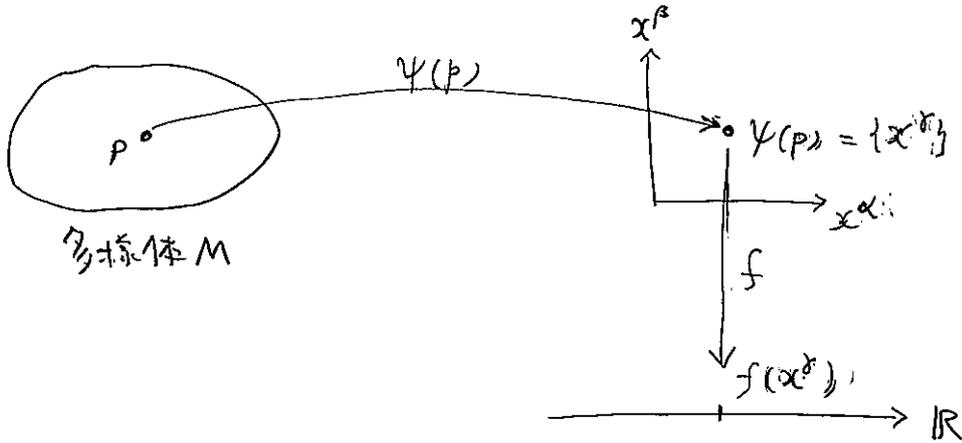
物理量やそれらの間の関係式(方程式)をどう表すか?

⇒ スカラー, ベクトル, テンソル と その微分の表現

河. ミユツツ 「物理学における幾何学的方法」 (吉岡書店)

和達 「微分・位相幾何」 (岩波書店)

3-0 スカラー



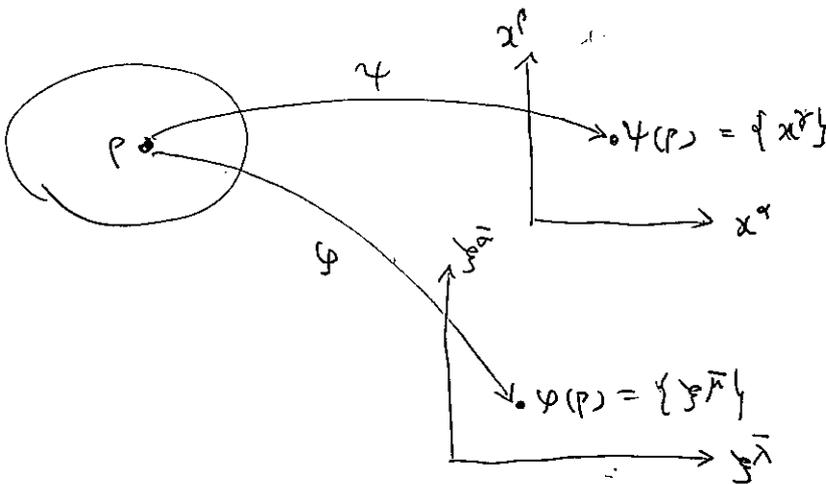
p の座標 $\{x^\alpha\}$ の関数 $f(x^\alpha)$

写像 ψ により $x^\alpha = x^\alpha(p)$ なる x^α

$$f(x^\alpha) = f(p) \quad \text{と考へる.}$$

↑ M 上の点

座標の写像 ψ を変えると...



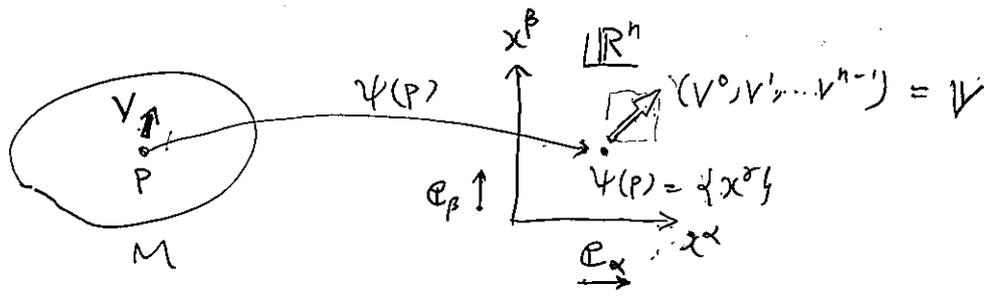
$$f(x^\alpha) = f(\xi^\lambda) = f(p)$$

↑ 同一の点 p で、値は同じ

3-1 ベクトル

M の点 P でのベクトルは どう定義するか?

→ 座標を付けて、 \mathbb{R}^n 上のベクトルと対応づける。
 ↑ 既知



\mathbb{R}^n でのベクトルの基底, 成分 の概念は既知.

) \mathbb{R}^n での $V = V^\alpha e_\alpha$ (e_α : 座標 α 方向の基底ベクトル
 V^α : 成分)

◎ $V \in \mathbb{V}$. M 上の点 P における抽象的なベクトル V の 表現 をみる.

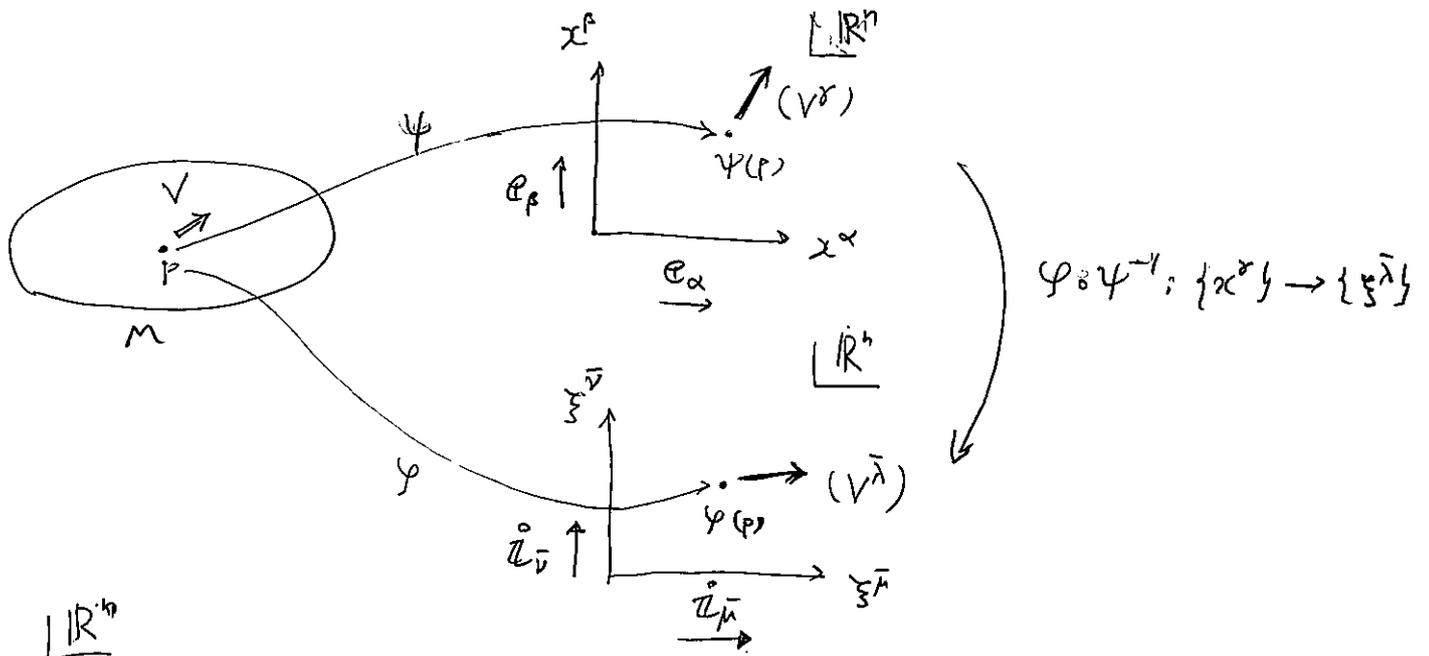
V の集合は \mathbb{R}^n 上で線型空間 L を作る (n次元)
 $(V, W \in L \rightarrow aV + bW \in L)$

M 上の点 P でのベクトルの集合も, この対応により線型空間 L となる.
 $(V, W \in L \rightarrow aV + bW \in L)$

L を M の点 P における 接空間 $T_P M$ と呼ぶ
 (tangent space)

M に異なる座標を導入するとき...

5



-) \mathbb{R}^n $\psi(P)$ での基底ベクトル e_α
 $\psi(P)$ " $e_{\bar{\mu}}$

これは \mathbb{R}^n の基底ベクトルなので、変換の仕方は既知

$\phi \circ \psi^{-1}$ を $x^{\bar{\mu}} = x^{\bar{\mu}}(x^\alpha)$ とする。

) 基底の変換

$$e_{\bar{\mu}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\bar{\mu}}} e_\alpha \Leftrightarrow e_\alpha = \frac{\partial x^{\bar{\mu}}}{\partial x^\alpha} e_{\bar{\mu}}$$

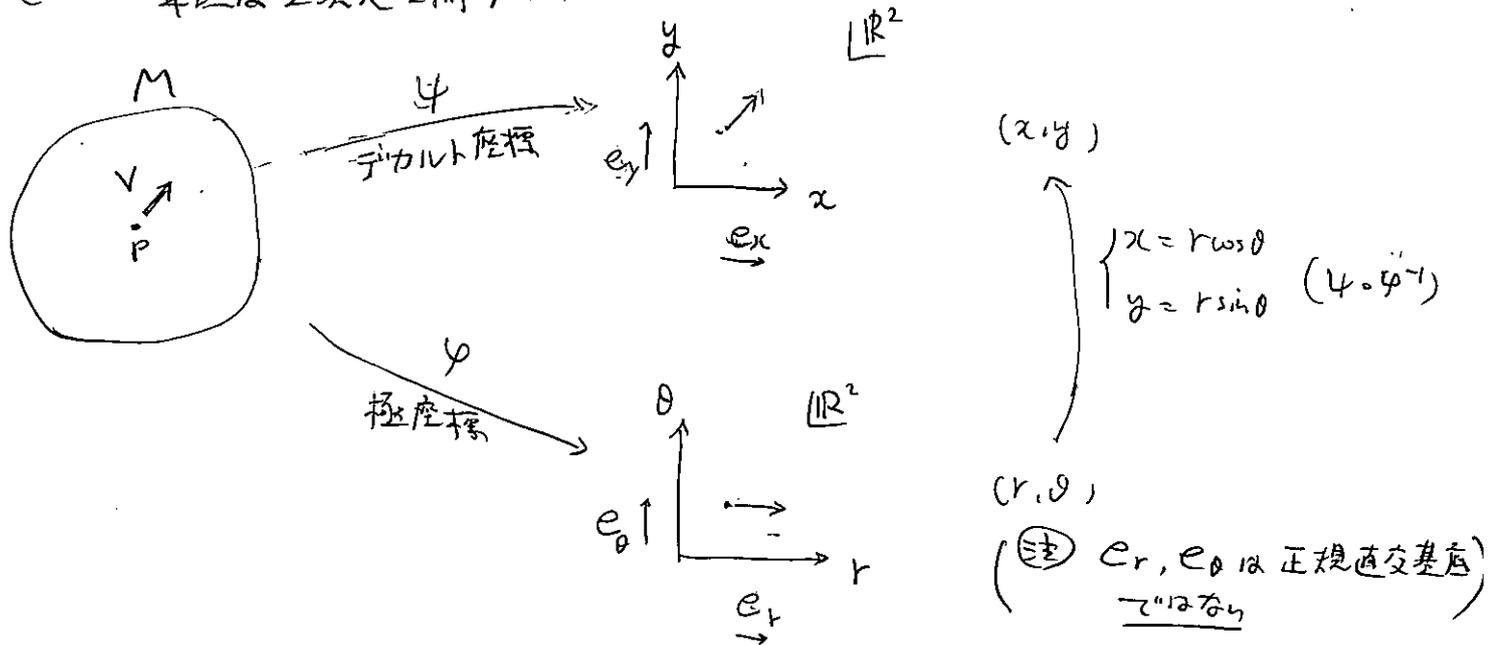
M 上の点 P でのベクトル V の表現は複数ある (ψ, ϕ のとらえととらえ) が、

それらは 同じもの である。

($V =$) $V^\alpha e_\alpha = V^{\bar{\mu}} e_{\bar{\mu}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V^{\bar{\mu}} = \frac{\partial x^{\bar{\mu}}}{\partial x^\alpha} V^\alpha \\ \text{or} \\ V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\bar{\mu}}} V^{\bar{\mu}} \end{array} \right. \quad \textcircled{1}$

ベクトル成分の変換則

(ex) 单位圆 2次元空间 M



) $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$

(
$$\begin{cases} e_r = \frac{\partial x}{\partial r} e_x + \frac{\partial y}{\partial r} e_y = \cos \theta \cdot e_x + \sin \theta \cdot e_y = \\ e_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} e_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} e_y = -r \sin \theta \cdot e_x + r \cos \theta \cdot e_y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V^r e_r + V^\theta e_\theta &= (V^r \cos \theta - V^\theta r \sin \theta) e_x + (V^r \sin \theta + V^\theta r \cos \theta) e_y \\ &= V^x e_x + V^y e_y \end{aligned}$$

→
$$\begin{cases} V^x = V^r \cos \theta - V^\theta \cdot r \sin \theta \\ V^y = V^r \sin \theta + V^\theta \cdot r \cos \theta \end{cases}$$

逆12.
$$e_x = \cos \theta \cdot e_r - \frac{\sin \theta}{r} e_\theta, \quad e_y = \sin \theta \cdot e_r + \frac{\cos \theta}{r} e_\theta$$

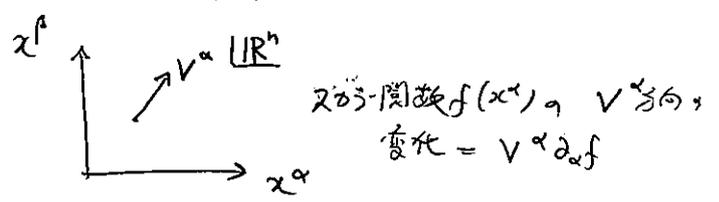
座標を x^α とおくと (x^α)

P での接ベクトル V に対して、 M 上の関数 f の方向微分が定義できる。

$$\partial_V f \equiv V^\mu \partial_\mu f(x^\alpha(p))$$

\downarrow
 \mathbb{R}^n 上、 V の成分

\swarrow
 たがひの関数 $f(x^\alpha)$ の偏微分



この $\partial_V f$ は、別の座標系で計算しても同じ値に等しい。(スカラー)

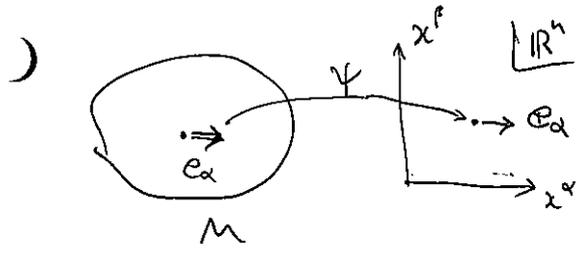
$$V^\mu \partial_\mu f = V^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} \cdot \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}}_{\delta^\nu_\mu} \partial_\nu f = V^\nu \partial_\nu f$$

$\rightarrow \partial_V f \in M$ 上の f の方向微分と定義しよう

M 上のベクトル V と微分演算子 ∂_V は一対一に対応

$\Rightarrow V$ と ∂_V を同一視する。

図 座標基底



M の座標 x^α 方向の (\mathbb{R}^n 内での) 基底 e_α に対応する M 上のベクトル e_α

\downarrow
 α 方向の座標基底ベクトル

定義より、この座標での e_α の成分は

$$(0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \Rightarrow \delta^\mu_\alpha$$

\uparrow
 α 番目

$\ast e_\alpha$ は別の座標での成分は必ずしも δ^μ_α のように決まらない

e_α は ∂_α , $(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})$ などと書くこともできる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)^\mu = \delta^\mu_\alpha$$

$\left(\begin{array}{l} M \text{ 上の座標系 } \{x^\beta\} \text{ の } x^\alpha \text{ 座標に対する基底ベクトル} \\ \text{の } \alpha \text{ 座標での } \mu \text{ 成分} \end{array} \right)$

3-2 一形式 (one-form)

M上のベクトルから実数への線型写像 \Rightarrow M上の一形式

$u, v \in T_p M$ に対して

$$\tilde{\omega}(au + bv) = a\tilde{\omega}(u) + b\tilde{\omega}(v) \in \mathbb{R}$$

となる $\tilde{\omega}$ の集合 \Rightarrow 線型空間 (n次元) となる

$T_p^* M$: M上の点 pにおける余接空間

(cotangent space)

$$\begin{cases} u \in T_p M \\ \tilde{\omega}, \tilde{\sigma} \in T_p^* M \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A\tilde{\omega} + B\tilde{\sigma})(u) = A\tilde{\omega}(u) + B\tilde{\sigma}(u)$$

$T_p M$ と $T_p^* M$ は互いに 双対 (ベクトルと一形式は作用する線型関数と見做す)

一形式の座標基底 (双対基底)

座標 $\{x^\alpha\}$ での座標基底ベクトル e_α ($e_\alpha \in T_p M$)

この座標での一形式の座標基底 θ^μ と ($\theta^\mu \in T_p^* M$)

$$\theta^\mu(e_\alpha) = \delta_\alpha^\mu$$

で定義

一形式 $\tilde{\omega} = \omega_\lambda \theta^\lambda$ に対して

$$\tilde{\omega}(e_\alpha) = \omega_\lambda \theta^\lambda(e_\alpha) = \omega_\lambda \delta_\alpha^\lambda = \omega_\alpha$$

\uparrow $e_\alpha \in \lambda$ 成分 \uparrow ω の α 成分が取り出せる

ベクトル $u \in T_p M$ は一形式に作用する線型関数と見做す

$$u(\theta^\mu) = u^\nu e_\nu(\theta^\mu) = u^\nu \delta_\nu^\mu = u^\mu$$

θ^μ の成分 $\Rightarrow (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ μ 番目

形式の座標変換

$u \in T_p M, \tilde{\omega} \in T_p^* M$

$\tilde{\omega}(u) = \omega_\alpha \theta^\alpha(u^\beta e_\beta) = \omega_\alpha u^\beta \theta^\alpha(e_\beta) = \omega_\alpha u^\beta \delta^\alpha_\beta = \omega_\alpha u^\alpha$

- 座標変換 $\{x^\alpha\} \rightarrow \{y^\mu\}$ により $e_\alpha \rightarrow E_\mu$ 基底へつくり
- $\theta^\alpha \rightarrow \lambda^\mu$ 基底-形式

$\omega_\alpha u^\alpha = \omega_\alpha \cdot (u^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}) = (\omega_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}) \cdot u^\mu$

↑
スカラー関数
座標変換で不変

$\omega_\mu u^\mu$

よって $\omega_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \omega_\alpha$ (成分)

また、基底-形式は

$\lambda^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \omega^\alpha$

と変換する。

(ex.) スカラー関数の勾配 (gradient)

M上のスカラー関数 f 座標変換 \mathbb{R}^n の関数 $f(x^\alpha)$

$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \theta^\alpha$ で定義される形式 \Rightarrow fの勾配 $\tilde{d}f$

$\tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \theta^\alpha$

$\tilde{d}f(u) = u^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ (fのu方向の方向微分)

* 基底 $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ の双対基底を $\tilde{d}x^\mu$ (or dx^μ) と書く。

$\tilde{d}x^\mu (\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) = \delta^\mu_\alpha$

(3-3) テンソル

一般の多様体上のテンソルは、接空間、余接空間の元の直積空間から \mathbb{R} への多重線型写像として定義される。

(ex.) $u, v \longrightarrow Q(u, v) \in \mathbb{R}$
 \nearrow $T(M)$ $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソル

$\tilde{\omega}, \tilde{\lambda} \longrightarrow S(\tilde{\omega}, \tilde{\lambda}) \in \mathbb{R}$
 \nearrow $T^*(M)$ $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソル

$\tilde{\omega}, u \longrightarrow Z(\tilde{\omega}, u) \in \mathbb{R}$
 \nearrow $T^*(M), T(M)$ $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソル

テンソル積「 \otimes 」だよ

テンソルの基底は 座標基底 1-form, 座標基底ベクトルから構成できる。

ex. 1) 2次元極座標で $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルの基底は

$dr \otimes dr, dr \otimes d\varphi, d\varphi \otimes dr, d\varphi \otimes d\varphi$

任意の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソル Q は

$Q = Q_{11} dr \otimes dr + Q_{12} dr \otimes d\varphi + Q_{21} d\varphi \otimes dr + Q_{22} d\varphi \otimes d\varphi$

と書ける。($Q_{\alpha\beta}$: 成分)

$u = u^1 \frac{\partial}{\partial r} + u^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}, v = v^1 \frac{\partial}{\partial r} + v^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}$ とおくと

$Q(u, v) = Q_{11} dr(u) \otimes dr(v) + Q_{12} dr(u) \otimes d\varphi(v) + \dots$

$= Q_{11} dr(u^1 \frac{\partial}{\partial r} + u^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}) \cdot dr(v^1 \frac{\partial}{\partial r} + v^2 \frac{\partial}{\partial \varphi})$

$+ Q_{12} dr(u^1 \frac{\partial}{\partial r} + u^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}) \cdot d\varphi(v^1 \frac{\partial}{\partial r} + v^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}) + \dots$

$= Q_{11} \{ u^1 dr(\frac{\partial}{\partial r}) + u^2 dr(\frac{\partial}{\partial \varphi}) \} \cdot \{ v^1 dr(\frac{\partial}{\partial r}) + v^2 dr(\frac{\partial}{\partial \varphi}) \}$

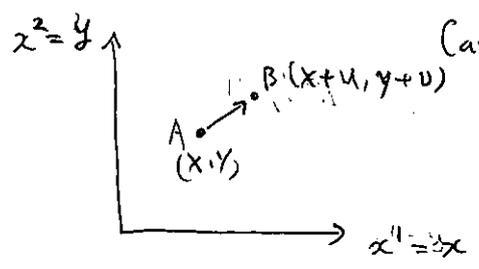
$+ Q_{12} \{ u^1 dr(\frac{\partial}{\partial r}) + u^2 dr(\frac{\partial}{\partial \varphi}) \} \cdot \{ v^1 d\varphi(\frac{\partial}{\partial r}) + v^2 d\varphi(\frac{\partial}{\partial \varphi}) \} + \dots$

$= Q_{11} u^1 v^1 + Q_{12} u^1 v^2 + Q_{21} u^2 v^1 + Q_{22} u^2 v^2$

(23-4) 計量テンソル

ベクトルの長さや内積を定義するには?

ex. 2次元平面



(Cartesian 座標系)

$A(x, y), B(x+u, y+v)$

の(距離)² = dl^2

$$dl^2 = u^2 + v^2 (= u \cdot u + v \cdot v)$$

(2) テンソル g を $g = g_{11} dx \otimes dx + g_{12} dx \otimes dy + g_{21} dy \otimes dx + g_{22} dy \otimes dy$

とすれば $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と定義してみる。

$$\vec{AB} = u \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ の } \vec{AB}$$

$$g(\vec{AB}, \vec{AB}) = u^2 + v^2 = dl^2 \text{ となる } \Rightarrow g \text{ が (距離)}^2 \text{ を定義}$$

一般. 2つのベクトル $a = a^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + a^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right), b = b^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + b^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)$

に対し

$$g(a, b) = a^1 \cdot b^1 + a^2 \cdot b^2 = g(b, a)$$

$\Rightarrow g$ はベクトルの内積を定義

対称 (2) テンソル g を (2次元の) 計量テンソル (metric tensor) と呼ぶ。

g の極座標表現

(x^1, x^2)

$$x^\alpha = (x, y), \xi^{\bar{\alpha}} = (r, \varphi) \text{ とする}$$

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^{\bar{\mu}}} d\xi^{\bar{\mu}} \right) \otimes \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^{\bar{\nu}}} d\xi^{\bar{\nu}} \right) = \left(g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^{\bar{\mu}}} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^{\bar{\nu}}} \right) d\xi^{\bar{\mu}} \otimes d\xi^{\bar{\nu}}$$

$$= g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} d\xi^{\bar{\mu}} \otimes d\xi^{\bar{\nu}} = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \quad g \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

一般の n次元多様体上に (距離(長さ))^2 を定義する 対称 (2) テンソル (計量) が付与されるとき、これを Riemann 多様体という。

Minkowski 時空の場合 => interval は正定値でない (interval は 0 または 負の値をとり得る)

↓
擬 Riemann 多様体 (時空 => (-, +, +, +) Lorentzian 多様体)

* 数学的には計量と多様体に勝手に付与できる

→ 物理は登場する「時空」を多様体として扱う場合

その計量は勝手に決められる

→ Einstein 方程式を矛盾なく満たす解として g が決められる。

* 計量 $g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$ に対して

$$g^{\mu\nu} = [g^{-1}]^{\mu\nu} \text{ とする。 } (g^{-1} \cdot g = \mathbb{1} \text{ or } g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda)$$

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \text{対称 (2) テンソル}$$

これは計量と考えることができて、(1形式の「長さ」・「内積」を定義)

** 計量を介して 双対空間 (tangent space ↔ cotangent space) の間に自然な対応が成る。

$$u \in T(M) \implies g(u, \cdot) = (g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta)(u, \cdot)$$

$$= g_{\alpha\beta} dx^\alpha(u) \cdot dx^\beta$$

$$= (g_{\alpha\beta} u^\alpha) dx^\beta$$

$$= \underbrace{u_\beta}_{\text{1-form}} dx^\beta = \tilde{u} \text{ (} u \text{ に対応する 1-form)}$$

$$\tilde{\omega} \in T^*(M) \implies g(\tilde{\omega}, \cdot) = (g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right))(\tilde{\omega}, \cdot)$$

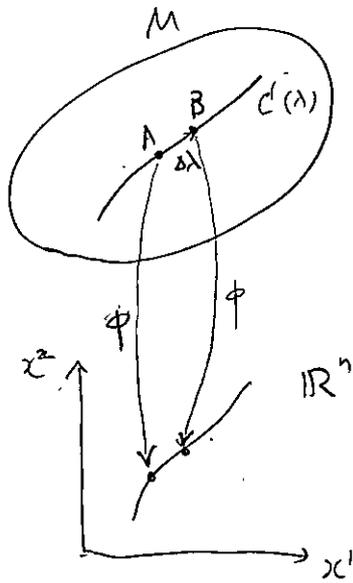
$$= g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)(\tilde{\omega}) \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right)$$

$$= g^{\alpha\beta} \omega_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \omega^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \text{ (} \tilde{\omega} \text{ に対応する 1-form)}$$

3-5 テンソルの微分

(A) スカラー

多様体上のスカラー量の微分



スカラー f

- 曲線 $C(\lambda)$ で方向を指定: $\lambda: \text{パラメータ}$
- $\Delta\lambda$ だけ離れた点 A, B での値の差分

$$\frac{1}{\Delta\lambda} (f(B) - f(A))$$

• $\Delta\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{df}{d\lambda}$

• 座標 $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を使えば

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^m}{d\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^m} \left[f = \phi^{-1}(x^1, \dots, x^n) \right]$$

→ $C(\lambda)$ の接ベクトル $\frac{dx^m}{d\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)$ は \Rightarrow λ 方向微分!

微分法では方向を指定するベクトル成分 "fの微分"

一方、 $\frac{\partial f}{\partial x^m}$ は df (1-形式) の成分とも見ることが出来る。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m$$

つまり、微分 はスカラー (0) テンソル) を 1-形式 (1) テンソル) に写す演算 (∇ と書く) と考えられる。

$$\underbrace{f}_{\text{スカラー}} \xrightarrow{\text{微分}} \underbrace{\nabla f}_{\text{1-形式}} \equiv df = \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m \equiv \underbrace{\nabla_\mu f}_{\text{または } \partial_\mu f} dx^m$$

* ベクトル u の方向への微分を ∇_u と書く

$$\nabla_u f \equiv u^m \frac{\partial f}{\partial x^m}$$

特に、 $u = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) = e_\alpha$ (座標基底ベクトル) のとき

$$\nabla_{e_\alpha} f = \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)} f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \equiv \nabla_\alpha f$$

(B) ベクトル

ベクトルの 向き (別のベクトルを"指定") への微分を考えた

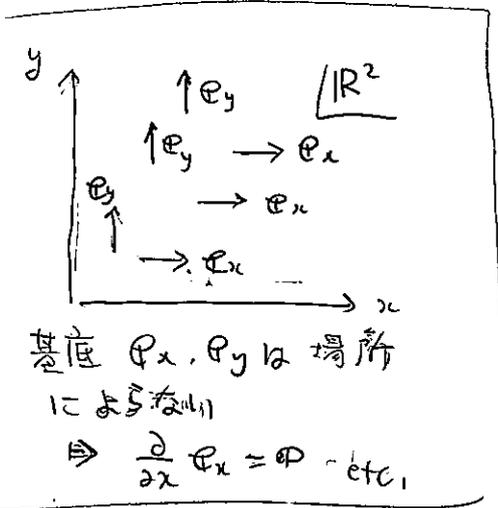
(ex) 2次元 Cartesian

$$V = V^x e_x + V^y e_y$$

V の e_x 方向 への微分は?

Leibnitz rule を適用しよ。

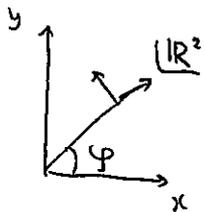
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V &= \frac{\partial}{\partial x} (V^x e_x + V^y e_y) = \frac{\partial}{\partial x} V^x e_x + V^x \frac{\partial}{\partial x} e_x \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} V^y e_y + V^y \frac{\partial}{\partial x} e_y \\ &= \frac{\partial V^x}{\partial x} e_x + \frac{\partial V^y}{\partial x} e_x \end{aligned}$$



⇒ 成分の微分を係数としてベクトルとすればよい

● これは、 $\frac{\partial}{\partial x_i} e_j \neq 0$ のときはどうしたらよいか??

(ex) 2次元 極座標



$$\frac{\partial}{\partial r} \equiv e_r, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} \equiv e_\phi$$

$$e_r = \cos \phi \cdot e_x + \sin \phi \cdot e_y$$

$$e_\phi = -r \sin \phi e_x + r \cos \phi e_y$$

← (Eとrの互換性注意)

よって

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} e_r = 0, & \frac{\partial}{\partial \phi} e_r = \frac{1}{r} e_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} e_\phi = \frac{1}{r} e_\phi, & \frac{\partial}{\partial \phi} e_\phi = -r e_r \end{cases}$$

よって、 $V = V^r e_r + V^\phi e_\phi$ にして

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial V^r}{\partial \phi} e_r - \frac{\partial V^\phi}{\partial \phi} e_\phi + \frac{V^r}{r} e_\phi - r V^\phi e_r = \left(\frac{\partial V^r}{\partial \phi} - r V^\phi \right) e_r + \left(\frac{\partial V^\phi}{\partial \phi} + \frac{V^r}{r} \right) e_\phi$$

① 基底ベクトルの座標軸方向の微分は、基底ベクトルの線型結合で書ける (とある)

$$e_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{とある}$$

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\alpha} \equiv C_{\mu\alpha}^\beta e_\beta$$

接続係数 (connection coefficients)

$C_{\mu\alpha}^\beta$ によるベクトルの座標微分は、次のように形式的に書ける。

$$V = V^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = V^\nu e_\nu$$

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\alpha} + V^\mu C_{\mu\alpha}^\nu \right) e_\nu$$

スカラー ϕ の場合と同様に、 $\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$ を "係数" とするテンソル $\nabla_\alpha \phi$ を考える。

$$\nabla V \equiv \underbrace{dx^\alpha}_{\text{基底}} \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} \equiv \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\alpha} + V^\mu C_{\mu\alpha}^\nu \right) dx^\alpha \otimes e_\nu$$

$\Rightarrow \nabla V$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソル となるべき

∇ を演算子として考えると、

$$V \longrightarrow \nabla V$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{テンソル} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{テンソル}$$

では、 ∇V がテンソルとなるためには $C_{\mu\alpha}^\nu$ にはどのような制限がかかるか?

- 多重線型性
- 座標変換

座標変換 $x^\alpha \rightarrow y^\mu$ に対する ∇V の変換性を調べる。

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\alpha} + V^\mu C_{\mu\alpha}^\nu \right) dx^\alpha \otimes e_\nu$$

右辺を 変換 して みる

$$\left[\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \left\{ \frac{\partial x^\nu}{\partial y^{\bar{k}}} \cdot V^{\bar{k}} \right\} + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\bar{k}}} \cdot V^{\bar{k}} \cdot C_{\mu\alpha}^\nu \right] \cdot \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar{\sigma}}} dy^{\bar{\sigma}} \right) \otimes \left(\frac{\partial y^{\bar{\omega}}}{\partial x^\nu} e_{\bar{\omega}} \right)$$

\uparrow (座標 $y^{\bar{\lambda}}$ の $\partial/\partial V^\nu$ の変換) \uparrow V^μ \uparrow dx^α \uparrow e_ν
 $\left(\bar{e}_{\bar{\omega}} = \frac{\partial}{\partial y^{\bar{\omega}}} \right)$

$$= \left[\delta_{\bar{\sigma}}^{\bar{\lambda}} \delta_{\bar{k}}^{\bar{\omega}} \cdot \frac{\partial V^{\bar{k}}}{\partial y^{\bar{\lambda}}} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar{\sigma}}} \cdot \frac{\partial y^{\bar{\omega}}}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial y^{\bar{\lambda}}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^{\bar{\lambda}} \partial y^{\bar{k}}} + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\bar{k}}} \cdot C_{\mu\alpha}^\nu \right) V^{\bar{k}} \right] dy^{\bar{\sigma}} \otimes e_{\bar{\omega}}$$

$$\left(\frac{\partial y^{\bar{\lambda}}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar{\sigma}}} = \delta_{\bar{\sigma}}^{\bar{\lambda}} \right)$$

$$= \left[\frac{\partial V^{\bar{\omega}}}{\partial y^{\bar{\sigma}}} + \left\{ \frac{\partial y^{\bar{\omega}}}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^{\bar{\sigma}} \partial y^{\bar{k}}} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar{\sigma}}} \cdot \frac{\partial y^{\bar{\omega}}}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\bar{k}}} \cdot C_{\mu\alpha}^\nu \right\} V^{\bar{k}} \right] dy^{\bar{\sigma}} \otimes e_{\bar{\omega}}$$

これが ランジル ∇V の 座標 $y^{\bar{\lambda}}$ に対する表現となるのは、 [] 内か。

$$\frac{\partial V^{\bar{\omega}}}{\partial y^{\bar{\sigma}}} + V^{\bar{k}} C_{\bar{k}\bar{\sigma}}^{\bar{\omega}}$$

とならなければならない。

$$\rightarrow C_{\bar{k}\bar{\sigma}}^{\bar{\omega}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar{\sigma}}} \cdot \frac{\partial y^{\bar{\omega}}}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\bar{k}}} \cdot C_{\mu\alpha}^\nu + \frac{\partial y^{\bar{\omega}}}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^{\bar{\sigma}} \partial y^{\bar{k}}}$$

このよき変換を $C_{\mu\alpha}^\nu$ が ~~変換する~~ ことにより ∇V の ランジル性が保証される。
 受ける

・ $\left[\frac{\partial y^{\bar{\omega}}}{\partial x^\nu} \right]$ の項は $C_{\mu\alpha}^\nu$ 自身が ランジルとして変換しない ことを示す。

(c) 1-形式 ω による一般のテンソル

微分 ∇ を一般のテンソルに拡張する。
 (*)

(*) 共変微分 (covariant derivative)
 affine 接続 (affine connection)

▶ 1-形式

- スカラーとベクトルに対して作用
- Leibnitz 則

を仮定する。

⊙ ベクトル u , 1-形式 $\tilde{\omega}$

→ $\tilde{\omega}(u) = \omega_\mu u^\mu$ はスカラー

⇒ $\nabla_\alpha (\omega_\mu u^\mu) = (\nabla_\alpha \omega_\mu) \cdot u^\mu + \omega_\mu \cdot \nabla_\alpha u^\mu$
 Leibnitz 則

$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\omega_\mu u^\mu) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \omega_\mu + \omega_\mu \frac{\partial}{\partial x^\alpha} u^\mu$
 $\equiv (\nabla_\alpha \omega_\mu) u^\mu + \omega_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} u^\mu + u^\beta C_{\beta\alpha}^\mu \right)$

→ $0 = u^\mu \left(\nabla_\alpha \omega_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \omega_\mu + \omega_\nu C_{\mu\alpha}^\nu \right)$

任意の u に対して成立 ↓

$\nabla_\alpha \omega_\mu = \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\alpha} - C_{\mu\alpha}^\nu \omega_\nu$

つまり $\nabla \tilde{\omega} = \left(\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\alpha} - C_{\mu\alpha}^\nu \omega_\nu \right) dx^\mu \otimes dx^\alpha$

$\tilde{\omega} \xrightarrow{\nabla} \nabla \tilde{\omega}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

一般のテンソルの場合

(ex) ベクトルと 1-形式のテンソル積

$$Q = u \otimes \tilde{\omega} = u^\mu \omega_\nu e_\mu \otimes dx^\nu$$

$$\nabla Q = \nabla u \otimes \tilde{\omega} + u \otimes \nabla \tilde{\omega}$$

↑ Leibnitz 則

$$\rightarrow \nabla_\alpha Q = \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\alpha} + u^\mu C_{\mu\alpha}^\lambda \right) e_\lambda \otimes (\omega_k dx^k)$$

$$+ u^\lambda e_\lambda \otimes \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x^\alpha} - C_{k\alpha}^\gamma \omega_\gamma \right) dx^k$$

$$= \left[\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\alpha} \omega_k + u^\lambda \frac{\partial \omega_k}{\partial x^\alpha} + u^\mu C_{\mu\alpha}^\lambda \omega_k - u^\lambda C_{k\alpha}^\gamma \omega_\gamma \right] e_\lambda \otimes dx^k$$

$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (u^\lambda \omega_k)$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} Q^\lambda_k + Q^\mu_k C_{\mu\alpha}^\lambda - C_{k\alpha}^\gamma Q^\lambda_\gamma \right] e_\lambda \otimes dx^k$$

一般のテンソルの場合

- 成分の微分
- ベクトル的(上付き)添字と $C_{\alpha\beta}^\gamma$ の "α-添字" との縮約
- 1-form的(下付き)添字と $C_{\alpha\beta}^\gamma$ の "β-添字" との縮約 × (-1)

の和をとる。

$$\left[\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\gamma_1 \dots \gamma_m} &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\gamma_1 \dots \gamma_m} + \sum_i C_{\nu\alpha}^{\beta_i} T^{\beta_1 \dots \nu \dots \beta_k}_{\gamma_1 \dots \gamma_m} \\ &\quad - \sum_i C_{\gamma_i\alpha}^{\lambda} T^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\gamma_1 \dots \lambda \dots \gamma_m} \end{aligned} \right]$$

▶ 方向微分

スカラーの場合と同様に、ベクトル U の方向へのベクトルや 1-form の変化率を定義できる。 (* 結果は元のテンソルと同じ階数のテンソル) (cf. p. 13) で必ずこれに注意

$$V = V^\nu e_\nu, \quad \tilde{\omega} = \omega_\alpha dx^\alpha$$

$$\nabla_U V = U^\lambda \nabla_\lambda V = U^\lambda \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\lambda} + V^k C_{k\lambda}^\nu \right) e_\nu \quad (\text{ベクトル})$$

$$\nabla_U \tilde{\omega} = U^\lambda \nabla_\lambda \omega = U^\lambda \left(\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\lambda} - C_{\alpha\lambda}^k \omega_k \right) dx^\alpha \quad (\text{1-form})$$

(ex) 2次元極座標.

14 ~~21~~ $\lambda \cdot 1 = 2$ $\tilde{\omega}$

$$\left(\frac{\partial e_\mu^\rho}{\partial x^\alpha} \equiv C_{\mu\alpha}^\rho e_\rho \right)$$

$$C_{rr}^i = 0 \quad (i = r, \varphi)$$

$$C_{r\varphi}^r = 0, \quad C_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}$$

$$C_{\varphi r}^r = 0, \quad C_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}$$

$$C_{\varphi\varphi}^r = -r, \quad C_{\varphi\varphi}^\varphi = 0$$

$$V = V^r e_r + V^\varphi e_\varphi \quad (e_r = \frac{\partial}{\partial r}, e_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi})$$

$$\nabla_r V = \frac{\partial V^r}{\partial r} e_r + \left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial r} + \frac{V^\varphi}{r} \right) e_\varphi$$

$$\nabla_\varphi V = \left(\frac{\partial V^r}{\partial \varphi} - r V^\varphi \right) e_r + \left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} V^r \right) e_\varphi$$

▶ 微分の notation
座標 x^μ とする

ex) テンソル $T = T^\alpha_\beta e_\alpha \otimes dx^\beta$.

$$\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)} T = \nabla_\mu T = \left(\nabla_\mu T^\alpha_\beta \right) e_\alpha \otimes dx^\beta$$

$$= \left(T^\alpha_{\beta;\mu} \right) e_\alpha \otimes dx^\beta$$

セミコロンを使うと
いいよ。

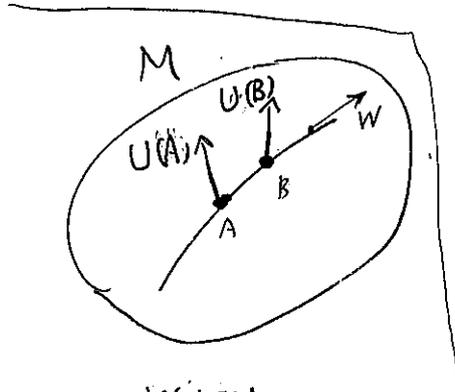
$$T^\alpha_{\beta;\mu} = \underbrace{T^\alpha_{\beta,\mu}}_{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^\alpha_\beta\right)} + C^\alpha_{\nu\mu} T^\nu_\beta - C_{\beta\mu}^k T^\alpha_k \quad \left(T^\alpha_{\beta;\mu} \equiv \nabla_\mu T^\alpha_\beta \right)$$

(D) 平行移動

多様体上のテンソルの"平行移動"

→ 曲線 $C(\lambda)$ をとり、その上の点でのテンソルの

比較を行う。(異なる成分の比較ではない。
→ 成分は基底のとり方によるため)



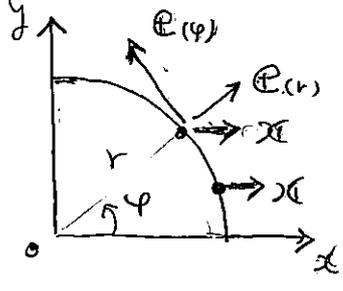
$C(\lambda)$ の接ベクトル W

$$\nabla_W T = W \cdot \vec{\nabla} T = 0 \quad (T: \text{テンソル})$$

C に沿って T が平行移動される (→ 成分比較は基底でやる) ことの定義とする。

$$W \cdot \nabla U = 0$$

(ex.)



$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \mathcal{E}_x, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \equiv \mathcal{E}_r, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \equiv \mathcal{E}_\phi$$

• \mathcal{E}_r の \mathcal{E}_ϕ 方向への方向微分は?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\frac{\sin \phi}{r} \\ -\sin \phi & \frac{\cos \phi}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_r \\ \mathcal{E}_\phi \end{pmatrix}$$

\mathcal{E}_r 方向

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_\phi \cdot \nabla \mathcal{E}_r) &\equiv \mathcal{E}_\phi^j \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{E}_r^i + \mathcal{E}_r^j C_{j r}^i \right) + \mathcal{E}_r^j \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{E}_r^i + \mathcal{E}_\phi^k C_{k \phi}^i \right) \\ &= -\sin \phi + \left(-\frac{\sin \phi}{r} \right) \cdot (-r) \\ &= 0 \end{aligned}$$

\mathcal{E}_ϕ 方向

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_\phi \cdot \nabla \mathcal{E}_\phi) &= \mathcal{E}_\phi^j \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{E}_\phi^i + \mathcal{E}_r^j C_{j r}^i \right) + \mathcal{E}_r^j \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{E}_\phi^i + \mathcal{E}_\phi^k C_{k \phi}^i \right) \\ &= -\frac{\cos \phi}{r} + \frac{\cos \phi}{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴ $\mathcal{E}_\phi \cdot \nabla \mathcal{E}_r = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_r$ は \mathcal{E}_ϕ に沿って平行移動される。

(E) Levi-Civita 接続と Christoffel 記号

* 接続係数のとり方には任意性があり、それぞれの係数のとり方によって

微分 ∇ の異なる定義 (「接続」の定義) が可能

ここでは一般相対論に関係する特別な接続を導入

◎ 接続の制限

次の条件を接続に課す。

(i) 計量と可換 (metric-compatible)

$$\nabla g = 0 \quad ; \quad g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

(ii) ねじれが無し (torsion-free)

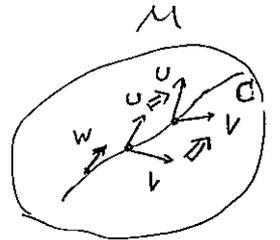
$$C_{\alpha\beta}^\nu = C_{\beta\alpha}^\nu$$

⊗ (1) たけを要請する
接続は Riemann 接続
(Riemannian connection)

(i) の条件は

Ⓐ ベクトルの内積が平行移動で不変なこと

Ⓑ 「計量テンソル \leftrightarrow 重力」の対応では、局所 Lorentz 系の存在も要請すること



に対応。

Ⓐ: ベクトル U, V, W , 計量 g

U, V の内積 $g(U, V)$

$$W \cdot \nabla (g(U, V)) = (W \cdot \nabla g)(U, V) + g(W \cdot \nabla U, V) + g(U, W \cdot \nabla V)$$

$\xrightarrow[\text{平行移動}]{W \cdot \nabla \text{沿って}}$ $W \cdot \nabla U = 0, \quad W \cdot \nabla V = 0$

$$\therefore W \cdot \nabla (g(U, V)) = (W \cdot \nabla g)(U, V)$$

$$\nabla g = 0 \Rightarrow W \cdot \nabla (g(U, V)) = 0 \rightarrow g(U, V) \text{ は不変}$$

条件 (ii) は $C_{\alpha\beta}^{\nu} - C_{\beta\alpha}^{\nu} \equiv T_{\alpha\beta}^{\nu}$ (torsion tensor)

が恒等的に 0 ということ

* $C_{\alpha\beta}^{\nu}$ は 3x3x3
 2'ないか: 反対称化
 しての 3x3x3
 になる

* 一般相対論の拡張重力理論 "Einstein-Cartan理論" での

$$T_{\alpha\beta}^{\nu} \neq 0 \text{ となっている.}$$

制限 (i), (ii) により、接続係数の形は次のように決まる。

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^{\nu} &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\lambda\beta} + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} g_{\alpha\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} g_{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} (g_{\lambda\beta, \alpha} + g_{\alpha\lambda, \beta} - g_{\alpha\beta, \lambda}) \end{aligned}$$

この $\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}$ を Christoffel 記号 といひ、これを接続係数として採用する接続(微分規則)を Levi-Civita 接続といひ。

(ex) 3次元円筒座標 (R, φ, z)

$$g = dR \otimes dR + R^2 d\varphi \otimes d\varphi + dz \otimes dz$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R \\ \varphi \\ z \end{matrix}$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^R = -R, \quad \Gamma_{R\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi R}^{\varphi} = \frac{1}{R}, \quad \text{それ以外の成分} = 0$$

$$\text{したがって } A = A^R \left(\frac{\partial}{\partial R} \right) + A^{\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + A^z \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ となる。}$$

$$\left(\nabla_R A \right)^i = \frac{\partial}{\partial R} A^i + \Gamma_{jR}^i A^j = \left(\frac{\partial}{\partial R} A^R, \frac{\partial}{\partial R} A^{\varphi} + \frac{1}{R} A^{\varphi}, \frac{\partial}{\partial R} A^z \right)$$

$$\left(\nabla_{\varphi} A \right)^i = \frac{\partial}{\partial \varphi} A^i + \Gamma_{j\varphi}^i A^j = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} A^R, \frac{\partial}{\partial \varphi} A^{\varphi} + \frac{1}{R} A^R, \frac{\partial}{\partial \varphi} A^z \right)$$

$$\left(\nabla_z A \right)^i = \frac{\partial}{\partial z} A^i + \Gamma_{jz}^i A^j = \left(\frac{\partial}{\partial z} A^R, \frac{\partial}{\partial z} A^{\varphi}, \frac{\partial}{\partial z} A^z \right)$$

★ Christoffel 記号の導出

$\nabla g = 0$ の成分を cyclic に書き下す.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\alpha\lambda} = 0 \quad \textcircled{1} \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g_{\nu\lambda} = 0 \quad \textcircled{2} \\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0 \quad \textcircled{3} \end{array} \right.$$

① + ② - ③ :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu} - (\Gamma_{\alpha\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda) g_{\lambda\mu} - (\Gamma_{\alpha\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda) g_{\nu\lambda} - (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) g_{\alpha\lambda} \quad (g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda} \text{ etc.})$$

$$\Gamma_{\alpha\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda, \quad \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda = \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (\text{torsion free})$$

\Downarrow

$$2 g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu}$$

$$\Downarrow (x^\lambda g^{\beta\alpha})$$

$$2 \Gamma_{\mu\nu}^\beta = g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu} \right)$$

$$\therefore \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) //$$

* Christoffel 記号の便利な公式

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\alpha} g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha} (\sqrt{-g}) \quad ; \quad g = \det(g_{\mu\nu})$$

* 行列 M に対して M が微小に変化したとき $(M \Rightarrow M + \delta M)$

$\ln |\det M|$
 の変化を考えた。

$$\begin{aligned} \delta \ln |\det M| &= \ln |\det (M + \delta M)| - \ln |\det M| \\ &= \ln \frac{\det (M + \delta M)}{\det M} \\ &= \ln (\det M^{-1} (M + \delta M)) \\ &= \ln \det (\mathbb{1} + M^{-1} \delta M) \end{aligned}$$

$$\det (\mathbb{1} + \epsilon) = 1 + \text{Tr} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \epsilon: \text{要素 } |\epsilon_{ij}| \ll 1 \text{ の行列}$$

$$\begin{aligned} \delta \ln |\det M| &= \ln (1 + \text{Tr} (M^{-1} \delta M)) \\ &\approx \text{Tr} (M^{-1} \delta M) \end{aligned}$$

よって $M_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ である。

$$\delta \ln |\det g| = g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$$

$$\therefore \frac{\partial \ln |\det g|}{\partial x^{\mu}} = g^{\alpha\beta} \partial_{\mu} g_{\alpha\beta}$$

$$\det g = g < 0 \quad \therefore$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ln (-g) = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ln \sqrt{-g} //$$

ii. 3D

$$\begin{aligned} \nabla_i F^i &= \partial_i F^i + \Gamma_{ik}^i F^k \\ &= \partial_i F^i + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k (\sqrt{g}) F^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} F^i) \end{aligned}$$

3-6 積分.

$$\sum (\text{4次元体積要素}) \cdot (\text{スカラー量})$$

= 一般座標変換に対し不変な体積要素

(ex) 3次元 Euclid 空間

$$dV = dx dy dz \quad (\text{Cartesian})$$

座標変換 $(x, y, z) \iff (\xi, \eta, \zeta)$

$$dV = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta$$

" det

← Jacobian

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

極座標 (r, θ, φ)

$$dx dy dz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

[4次元]

$$x^{\mu'} \longleftrightarrow x^{\mu}$$

$$\eta_{\mu'\nu'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_{\mu\nu}$$

$$dV = dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} \longleftrightarrow dV = \left| \frac{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right| dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

$$= J dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

ここで X トリックの変換を考えると

$$\frac{\partial X^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu'}}{\partial x^{\beta}} \eta_{\mu'\nu'} = g_{\alpha\beta}$$

↓ 行列式をとる

$$\left| \frac{\partial X^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \right| \cdot \left| \frac{\partial X^{\nu'}}{\partial x^{\beta}} \right| \cdot |\eta_{\mu'\nu'}| = |g_{\alpha\beta}|$$

\uparrow \nearrow \uparrow \nwarrow \uparrow
 J (-1) g と書く.

$$\therefore J^2 = -g, \quad J = \sqrt{-g}$$

4次元不変体積要素は

$$dV = \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \equiv \sqrt{-g} d^4x$$

(*) 3次元空間での計量を $dl^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ とすると.

$$(3次元) \quad dV = \sqrt{\gamma} d^3x \quad (\text{計量行列での計量 } \delta_{ij} \text{ に対して } |\delta| = +1)$$

$$\gamma \equiv \det(\delta_{ij})$$

3-6-2 一般化された Levi-Civita テンソル

Minkowski

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ が } (0, 1, 2, 3) \text{ の偶置換} \\ 0 & \\ -1 & \text{奇置換} \end{cases}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = [\alpha\beta\gamma\delta] \text{ と書く.}$$

一般の時空では

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g} [\alpha\beta\gamma\delta]$$

3-7 Lorentz 多様体 を 数学的モデルとしての時空の記述

重力の無い時空 \rightarrow Minkowski 時空 (数学的モデル)

- 計量 $\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$
- 事象 = 多様体上の点
- $m > 0$ の物体の運動 \Rightarrow 時間的曲線
- $m = 0$ " \Rightarrow 光曲線

重力のある時空

• 局所的には 重力の無い時空と等価

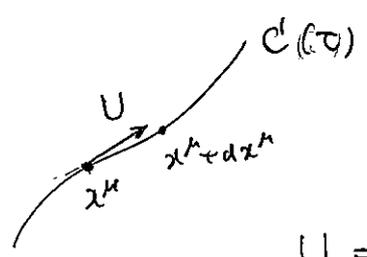
• (2-1-14) での議論 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
(局所的に Minkowski 的)

重力のある一般の時空は Lorentzian 計量 (符号 $(-1, +1, +1, +1)$) をもつ

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Lorentzian 多様体 を 数学的モデル と する.

• $m > 0$ の物体の運動 \rightarrow 時空多様体上の曲線 C



C 上の interval

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0$$

$$\equiv -d\tau^2 \quad (\text{固有時 } \tau \text{ の定義})$$

$$U = \frac{dx^\mu}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad \div \text{物体の 4元速度}$$

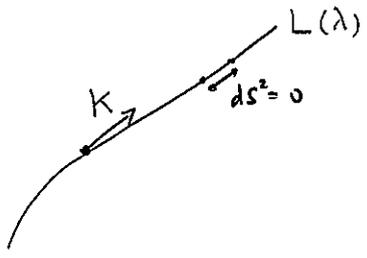
$$U \cdot U = g(U, U) = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1$$

• $m = 0$ の物体の運動

光曲線 $L \Rightarrow$ その上での interval は常に 0

(接ベクトルのノルム = 0)

$$\text{固有時}^2 = -ds^2 = 0 \rightarrow \text{パラメータとして使えない}$$



$$K = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad \div \text{物体の 4元速度}$$

$$K \cdot K = g(K, K) = g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = 0$$

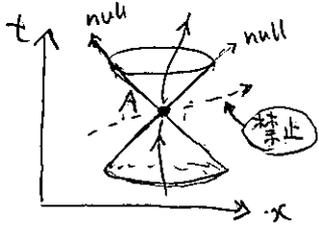
λ : affine パラメータ (任意性あり)

$$\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} x^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \right. \text{ と書けるよな感じ} \quad (\text{後の 2.5 参照})$$

▷ 因果構造 (causal structure)

Minkowski 時空 — 双曲的曲線のつくる光円錐が基準

• 光円錐は Lorentz 不変

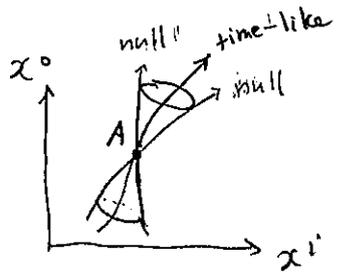


事象 A を通る時間的曲線は A を頂点とする光円錐内部にある

一般の時空

- 局所的に Minkowski
- 双曲的曲線は一般座標変換に対して不変 ($ds^2=0$)

→ 光円錐 (双曲的曲線の束で定義) を基準とする。



事象 A を通る時間的曲線は A を頂点とする光円錐内部にある (局所的には)

▷ 物理法則の書き換え

Minkowski 時空 → 一般の時空

- | | |
|------------------|----------------|
| • 特殊相対性原理 | • 一般相対性原理 |
| • テンソル量 | • テンソル量 |
| • ∂_μ | • ∇_μ |

○ 特殊相対論で成り立っていたテンソル方程式で

$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ と置換えると自動的に重力の効果か

考慮されるのではないか? → YES!

* $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ のとき $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \rightarrow 0$ なので $\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu$ となる

⇒ 「一般の時空」は Minkowski の場合を含む

"Alcubierre's warp drive": 一般相対論の範囲での 7-7° 航法

M. Alcubierre, Class. Quantum Grav., 11, L73 (1994)

局所的に時間的な世界線上の運動が 大局的に光速を超え得る。

▷ 計量

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - v_s(t) \cdot f(r_s) dt]^2 + dy^2 + dz^2 \quad (*)$$

$$\begin{cases} r_s = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2} \\ v_s(t) = \frac{dx_s(t)}{dt} \end{cases}$$

$f(t)$ は $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(r_s > R) = 0 \end{cases}$ R はある正の実数
を満たす滑らかな関数

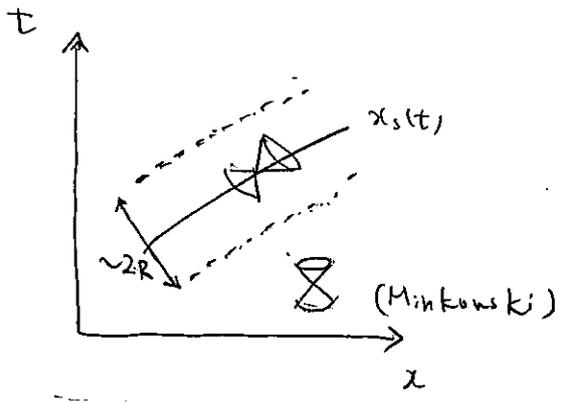
f の形 (warp drive の時空の曲げ方)
 $x_s(t)$ の形 (局所的に時間的な世界線: $ds^2 < 0$)

さうまくとれば 計量 (*) が Einstein 方程式の解となるようにできる

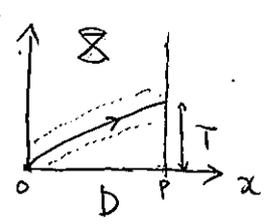
① の計量の性質

- $r > R$ での $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow$ Minkowski
- $r \ll R$ での 光円錐 ($y=z=0$)

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1 + v_s(t) \cdot f(r_s)$$



- $x = x_s(t)$ は 時間的な世界線 \Rightarrow 局所的に光速より遅い
- $x = x_s(t)$ の周囲に光円錐は傾く。



$$\frac{D}{T} > 1 \quad \text{etc.}$$

(ex)

質点の運動方程式

4元力 (重力以外)

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = f^\mu \quad [\text{Minkowski}]$$

$\downarrow (\frac{d}{d\tau} x^\mu \equiv u^\mu)$

$$m \frac{d}{d\tau} u^\mu = f^\mu \Rightarrow m \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} = f^\mu$$

$$\Rightarrow m u^\nu \partial_\nu u^\mu = f^\mu$$

$\partial_\nu \rightarrow \nabla_\nu$

$$m u^\nu \nabla_\nu u^\mu = f^\mu \quad [\text{一般の時空}]$$

↑ "重力" は ∇_ν の中の $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ に含まれる (cf. §2-6)

Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu, \quad \partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \quad [\text{Minkowski}]$$

$\downarrow \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu, \quad \nabla_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$$

完全流体のエネルギー - 運動量保存

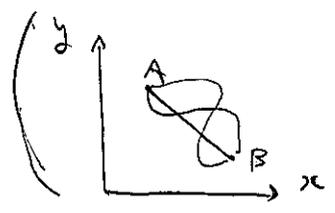
$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad ; \quad T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + p \eta^{\mu\nu}$$

$\Downarrow \partial_\nu \rightarrow \nabla_\nu \quad \& \quad \eta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad ; \quad T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

3-8 測地線 (geodesics)

計量の与えられた多様体上の任意の2点を結ぶ曲線のうち、
 "長さ" が 極値 をとるもの \Rightarrow 測地線

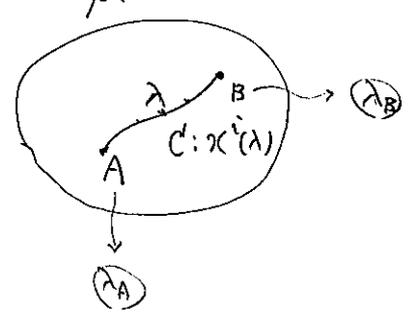


二次元平面上では2点を結ぶ直線が
 長さの極小値 (最小値) を与える。

ex. Riemann 多様体

計量 $dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$ ($i, j = 1 \sim 3$)

) 実数 λ でパラメータ付けられた曲線 $C: x^i(\lambda)$



$$I = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{\gamma_{ij} dx^i dx^j}$$

$$= \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}}$$

$\frac{dx^i}{d\lambda}$: $C(\lambda)$ の接ベクトルの成分

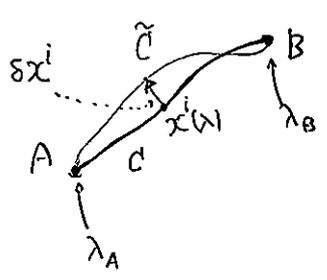
λ を C に沿った距離 s のものにとりみる。

) $I = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\gamma_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$ $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\lambda}$

すなわち C 上では $\gamma_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 1$

C から微小に変位した曲線 $\tilde{C}(\lambda)$ をとる (同じ λ でパラメータ表示)

(* $\tilde{C}(\lambda)$ 上では $\gamma_{ij} \dot{x}^j \dot{x}^i \neq 1$)



$$\delta I = \underbrace{\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\gamma_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}}_{C(\lambda)} - \underbrace{\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\gamma_{ij} \tilde{x}^i \tilde{x}^j}}_{\tilde{C}(\lambda)}$$

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \delta \sqrt{\gamma_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \\ &= \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \cdot \frac{1}{2 \sqrt{\gamma_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} \delta (\gamma_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \delta (\gamma_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)\end{aligned}$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x_j, \dot{x}^j) \rightarrow \delta \gamma_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k$$

同様

$$\begin{aligned}\delta (\gamma_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) &= \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j \delta x^k + \underbrace{\gamma_{ij} \delta \dot{x}^i \dot{x}^j}_{\text{}} + \underbrace{\gamma_{ij} \dot{x}^i \delta \dot{x}^j}_{\text{}} \\ &= \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j \delta x^k + \underbrace{(\gamma_{ij} \dot{x}^j \delta x^j) \cdot (\dot{x}^i \delta x^i)}_{\text{}} \\ &\quad + \underbrace{(\gamma_{ij} \dot{x}^i \delta x^i) \cdot (\dot{x}^j \delta x^j)}_{\text{}}\end{aligned}$$

$$= (\quad) \cdot \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j \delta x^k$$

$$- \left(\frac{\partial \gamma_{il}}{\partial x^l} \dot{x}^l \dot{x}^j + \gamma_{il} \ddot{x}^j \right) \delta x^i$$

$$- \left(\frac{\partial \gamma_{il}}{\partial x^l} \dot{x}^l \dot{x}^i + \gamma_{il} \ddot{x}^i \right) \delta x^j$$

$$\begin{aligned}\therefore \delta I &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \cdot (\quad) \cdot \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j \delta x^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \cdot \left[\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j \right. \\ &\quad \left. - (\delta_{kl} + \delta_{lk}) \ddot{x}^l \right] \delta x^k\end{aligned}$$

"表面項"
"0"

(* 以下 dummy 添字を替換して)

これに任意の変分 δx^k に対し停留条件

$$\rightarrow \left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j - (\delta_{kl} + \delta_{lk}) \ddot{x}^l = 0$$

γ^{mk} を掛けて整理 ($\gamma^{mk}\gamma_{kl} = \delta_l^m$)

$$\ddot{x}^m + \frac{1}{2} \gamma^{mk} \left(\frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x^m}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{ij}^m &= \frac{1}{2} \gamma^{mk} \left(\frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \right) \\ & \text{(計量 } \gamma_{ij} \text{ に対する Christoffel 記号)} \end{aligned} \right.$$

△ γ を計量とする Riemann 多様体上の測地線は (*) の形になる。

λ : アフィン (affine) パラメータ

擬 Riemann 多様体上での測地線も同様に定義され、(*) と同じ形式になる。

◎ Lorentzian 多様体の時間的 (time-like) 曲線

計量 g (符号 $(-+++)$)

固有時 $d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$$I = \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

τ はアフィンパラメータとする。

$$\rightarrow \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (**)$$

(2-1-4) で EEP を用いて求めた自由質点の運動方程式は

正にこの形である。

重力のみが働く自由質点は時空の測地線上で運動する。

4元速度を用いた表式

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = U^\mu \quad \text{とすると. } (**) \text{ は}$$

$$\frac{d}{d\tau} U^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0$$

$$\downarrow \frac{d}{d\tau} U^\alpha = \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} = U^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}$$

$$U^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0$$

$$\therefore \underline{U^\beta \nabla_\beta U^\alpha = 0} \quad (U \cdot \nabla U = 0)$$

$\Rightarrow U$ は、それを接ベクトルとする曲線に沿って平行移動している (測地線 \rightarrow 平行移動の定義)

★ 測地線方程式と等価な \rightarrow の作用積分.

$$\tilde{I} \equiv \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \cdot \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad \rightarrow \text{"Lagrangian"} \rightarrow \text{"速度の2次形式"}$$

も同じ測地線方程式を与える

◎ null的測地線 (質量ゼロ)

$$I \equiv \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \cdot g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad \lambda: \text{affineパラメータ}$$

λ 変分して停留解も求まる.

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \quad \text{with } g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

null条件

with $K^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ とすると.

$$K^\beta \nabla_\beta K^\alpha = 0 \quad ; \quad K^\alpha K_\alpha = 0$$

★ timelike な測地線の極限としての null 測地線

timelike

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

or

$$\frac{d}{d\tau} u^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0$$

$m u^\alpha \equiv p^\alpha$ (4元運動量) とすれば
 ↑
 粒子の静止質量

$$\frac{d}{d\tau} p^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma = 0$$

$$\tau/m \equiv \lambda \text{ とおく.}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{p^\alpha}{m} \right) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \left(\frac{p^\beta}{m} \right) \left(\frac{p^\gamma}{m} \right) = 0$$

$$\frac{p^\alpha}{m} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \equiv k^\alpha$$

$m \rightarrow 0$ 時 $\tau \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda$ は有限値のパラメータ (affine パラメータ)

k^α : 光子の 4元運動量

$$\frac{d}{d\lambda} k^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha k^\beta k^\gamma = 0 \quad (\text{null 測地線})$$

$$\left(k^\alpha k_\alpha = \lim_{m \rightarrow 0} m^2 \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx_\alpha}{d\tau} = 0 \right)$$

▷ 重力が弱く、物体の速さが遅いときの時間的測地線は、Newtonの運動方程式と再現できるか？

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad \text{か？} \quad h_{\mu\nu} \text{ は 時間的に変化する}$$

$$\rightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \approx \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} (\partial_{\gamma} h_{\mu\beta} + \partial_{\beta} h_{\mu\gamma} - \partial_{\mu} h_{\beta\gamma})$$

$$\text{- 近 } \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^j}{d\tau} \right) \quad (j=1\sim 3)$$

$$|\frac{dx^i}{dt}| \ll 1 \quad (c=1) \Rightarrow \left| \frac{dt}{d\tau} \right| \gg \left| \frac{dx^j}{d\tau} \right|$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \quad (\text{測地線方程式の } i \text{ 成分})$$

↓

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \eta^{i\mu} (\partial_{\gamma} h_{\mu\beta} + \partial_{\beta} h_{\mu\gamma} - \partial_{\mu} h_{\beta\gamma}) \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \frac{dx^{\gamma}}{d\tau} = 0$$

↓

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (\cancel{\partial_0 h_{i0}} + \cancel{\partial_0 h_{i0}} - \partial_i h_{00}) \cdot \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \approx 0 \quad (x^0 = t)$$

↓

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \cdot \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \approx 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \tau^{\mu\nu} \quad d\tau^2 &= -\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = dt^2 \left\{ (1 - \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}) - h_{00} - 2h_{0i} \frac{dx^i}{dt} - h_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right\} \\ &\approx dt^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\frac{\partial}{\partial x^i} \left(-\frac{h_{00}}{2} \right) \Leftrightarrow \text{(Newton)} \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

φ: 重力ポテンシャル

この極限で 測地線方程式はNewtonの運動方程式と再現する。

$$\phi = -\frac{1}{2} h_{00}$$

② 測地線と保存則

質量 $m \neq 0$ の粒子の4元運動量

$$p^\mu = m U^\mu \quad (U = U^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu})$$

測地線は

$$U \cdot \nabla U = 0 \rightarrow p \cdot \nabla p = 0 \quad \text{と書ける}$$

$$p^\beta \nabla_\beta p^\alpha = 0 \\ \downarrow \times \partial_{\alpha\mu}$$

$$0 = \underbrace{\partial_{\mu\alpha} p^\beta \nabla_\beta p^\alpha}_{\text{symmetric}} = p^\beta \nabla_\beta (\partial_{\mu\alpha} p^\alpha) \quad (\because \nabla g = 0) \\ = p^\beta \nabla_\beta p_\alpha$$

$$\Rightarrow p^\beta (\partial_\beta p_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa p_\kappa) = 0 \xrightarrow{p^\beta = m \frac{dx^\beta}{d\tau}} m \frac{d}{d\tau} p_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa p^\beta p_\kappa \quad (*)$$

(*) の右辺

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\kappa p^\beta p_\kappa = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}) p^\beta p_\kappa$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}) p^\beta p^\lambda$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta}) \cdot p^\lambda p^\beta \quad \left(\begin{array}{l} \because () \text{内の第2\&3項は } \lambda \leftrightarrow \beta \text{ に反対称} \\ p^\lambda p^\beta \text{ は } \lambda \leftrightarrow \beta \text{ に対称} \end{array} \right)$$

$$\therefore (*) \Rightarrow m \frac{d p_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta}) p^\lambda p^\beta \quad (**)$$

[この式の意味]

もし x^α 座標について $\partial_\alpha g_{\lambda\beta} = 0$ ($g_{\lambda\beta}$ が x^α に依存しない) なら

$$\frac{d p_\alpha}{d\tau} = 0 \rightarrow p_\alpha = \text{constant.} \quad (\text{測地線に沿って})$$

つまり、 p_α は運動の恒量となる。

▷ 計量から与えられる Christoffel 記号を簡単に計算する方法
 ("geodesic Lagrangian method")

計量 $g_{\mu\nu} \Rightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$?

$I = \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} \rightarrow \delta I = 0 \rightarrow \ddot{x}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} = 0$
 ($\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$)

$\tilde{I} = \int d\tau g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \rightarrow \delta \tilde{I} = 0$

*) \tilde{I} を直接変分して $\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} = 0$ の形の式を得る
 $\rightarrow \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma}$ の係数は $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ と見ていい。

(ex) $dx^2 = dR^2 + R^2 d\varphi^2 + dz^2$ (3次元 Euclid)

$\frac{dR}{d\lambda} \equiv \dot{R}, \frac{d\varphi}{d\lambda} \equiv \dot{\varphi}, \frac{dz}{d\lambda} \equiv \dot{z}$ ($\lambda: 1 \leq x \leq 2$)

$I \equiv \int d\lambda (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$ ($g = \begin{bmatrix} 1 & \varphi & z \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R \\ \varphi \\ z \end{matrix}$)

① \tilde{I} を R で変分

$\delta I_R = \int d\lambda (\delta(\dot{R}^2) + \delta(R^2 \dot{\varphi}^2))$ (\dot{z}^2 の項は R に λ を z としていい)

$= \int d\lambda (2\dot{R}\delta\dot{R} + \delta(R^2) \dot{\varphi}^2)$ ($\delta(\dot{R}^2) = 2\dot{R}\delta\dot{R}$)

$= \int d\lambda \cdot 2(\dot{R}\delta\dot{R} + R\dot{\varphi}^2 \delta R)$ ($\delta(R^2) = 2R\delta R$)

$= \int d\lambda \cdot 2 \left\{ \underbrace{(\dot{R}\delta\dot{R}) - \ddot{R}\delta R}_{\text{表面項の2倍}} + R\dot{\varphi}^2 \delta R \right\}$ ($\dot{R}\delta\dot{R}$ の項は部分積分)

$= 2 \int d\lambda \cdot \{-\ddot{R} + R\dot{\varphi}^2\} \delta R$

δR は任意なので $\delta I_R = 0 \rightarrow -\ddot{R} + R\dot{\varphi}^2 = 0$

$\ddot{R} + (-R)\dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} = 0 \iff \ddot{R} + \Gamma_{\varphi\varphi}^R \dot{x}^{\varphi} \dot{x}^{\varphi} = 0$ ($x^a = (R, \varphi, z)$)

$\Rightarrow \Gamma_{\varphi\varphi}^R = -R^2$

その他の $\Gamma_{ab}^R = 0$

② 次に φ を変分

$$\begin{aligned} \delta I_\varphi &= \int d\lambda \cdot R^2 \delta(\dot{\varphi}^2) \quad \leftarrow R^2, \dot{\varphi}^2 \text{ は } \varphi \text{ に 依 存 せ る} \\ &= \int d\lambda \cdot 2R^2 \dot{\varphi} \delta\dot{\varphi} \quad \leftarrow \delta(\dot{\varphi}^2) = 2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} \\ &= \int d\lambda \cdot 2 \left\{ (R^2 \dot{\varphi} \delta\dot{\varphi})' - (R^2 \ddot{\varphi}) \delta\varphi \right\} \quad \leftarrow \text{部 分 積 分} \end{aligned}$$

表面項 $(R^2 \dot{\varphi} \delta\dot{\varphi})'$ は 落 ち 去 る

$$\begin{aligned} &= -2 \int d\lambda (R^2 \ddot{\varphi}) \delta\varphi \\ &= -2 \int d\lambda (R^2 \ddot{\varphi} + 2R \cdot \dot{R} \dot{\varphi}) \delta\varphi \end{aligned}$$

$$\delta I_\varphi = 0 \rightarrow R^2 \ddot{\varphi} + 2R \cdot \dot{R} \dot{\varphi} = 0$$

$$\therefore \ddot{\varphi} + \frac{2}{R} \dot{R} \dot{\varphi} = 0 \iff \ddot{\varphi} + \Gamma_{ab}^\varphi \dot{x}^a \dot{x}^b = 0$$

* $\Gamma_{ab}^\varphi = \Gamma_{ba}^\varphi$ に 注 意

$$\ddot{\varphi} + \Gamma_{R\varphi}^\varphi \dot{R} \dot{\varphi} + \Gamma_{\varphi R}^\varphi \dot{\varphi} \dot{R} + \dots = 0$$

$$\therefore \Gamma_{R\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi R}^\varphi = \frac{1}{R}, \quad \text{そ の 他 の } \Gamma_{ab}^\varphi = 0$$

③ z を変分

$$\delta I_z = \int d\lambda \delta(\dot{z}^2) = 2 \int d\lambda \dot{z} \delta\dot{z} \quad \leftarrow \text{部 分 積 分} = -2 \int d\lambda \ddot{z} \delta z$$

$$\delta I_z = 0 \rightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow \Gamma_{ab}^z = 0 //$$

② Riemann 正規座標と局所慣性系

任意の時空点近傍で計量が " $\eta_{\mu\nu}$ ", Christoffel 記号が 0 となる座標系がこれ (局所慣性系)

cf. $EIP \rightarrow$ "局所的に特殊相対論の正し" ことの数学的表現

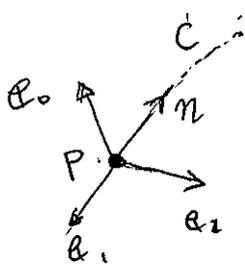
Riemann 正規座標 (Riemann normal coordinate)

(i) 時空点 P において、正規直交基底 E とする。

$$\{e_0, e_i\} \quad i=1 \sim 3.$$

$$\begin{cases} g(e_0, e_0) = -1, & g(e_0, e_i) = 0 \\ g(e_i, e_j) = \delta_{ij} \end{cases}$$

\Rightarrow $\{e_0, e_i\}$ は (座標) 基底と見れば、その座標系で $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$



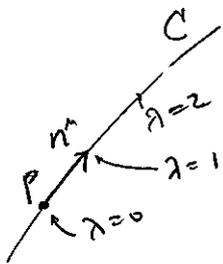
(ii) P から任意の単位ベクトル n^μ の方向へ測地線 C を伸ばす

• affine パラメータ λ は

n^μ が空間的 \Rightarrow 測地線に沿って固有距離 s

n^μ が時間的 \Rightarrow " 固有時 τ

• $\lambda=0$ at P



$$C: \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda} = 0$$

$$\begin{cases} x^\mu(P) = 0 \\ \frac{dx^\mu}{d\lambda}(P) = n^\mu \end{cases}$$

(iii) C 上のパラメータ λ の点の座標 x^α とは

$$x^\alpha = \lambda n^\alpha$$

とすると、 n^μ の方向に n を変じ、 P 周囲の時空点に座標を与えよ。

* この座標では

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\lambda^2} x^\alpha = 0 \text{ かつ } \frac{d}{d\lambda} x^\alpha = n^\alpha \\ \Gamma^\mu_{\nu\lambda} n^\nu n^\lambda = 0 \Rightarrow \Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0 \end{cases}$$

($x^\alpha = \lambda n^\alpha$)

3-9 時間変化しない弱い重力場の時空:

P. 347 で: 重力が弱い時空での遅い物体の運動は、時空計量を $g_{\mu\nu}$ (Minkowski 計量)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \quad (\text{Minkowski の } \delta_{\mu\nu} \text{ の } h_{\mu\nu})$$

としたときの h_{00} 成分を「重力ポテンシャル」と見た場合の Newton の運動方程式に従うと見えた。

逆に Newton 重力ポテンシャル中はこのような時空計量を決める。

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1)$$

$$\text{with } \Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (\text{Poisson 方程式})$$

* ここで c (光速) を明示した。 [重力の弱い時空の近似形] "Newton 計量"

(ϕ の時空の性質)

▶ 重力場中はその源から十分離れたところ、 $\phi = -\frac{GM}{r}$ のおりに振舞う (M: 中心物体の質量)

① $t \rightarrow \infty$ で $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

t は無極遠方から観測者の時計の進み方

* 漸近的平坦性 (asymptotically flat)

▶ 時間の遅れと重力赤方偏位

① の (t, x, y, z) 座標系で、一定の (x, y, z) に留まっている

観測者 A $\rightarrow (dx, dy, dz) = 0$

A の固有時 τ_A は

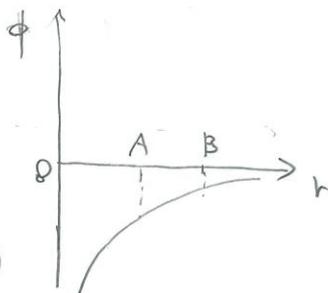
$$d\tau_A^2 = -ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi(A)}{c^2}\right) c^2 dt^2$$

$$\rightarrow d\tau_A = \sqrt{1 + \frac{2\phi(A)}{c^2}} \cdot c dt$$

この時空の 2点で 同じ座標時間 Δt に対応する固有時の比
(A, B)

$$\frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\phi(B)}{c^2}} \cdot c \Delta t}{\sqrt{1 + \frac{2\phi(A)}{c^2}} \cdot c \Delta t} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2\phi(B)}{c^2}}{1 + \frac{2\phi(A)}{c^2}}}$$

A が B より重力源に近いと、 $\phi(A) < \phi(B)$



↓
 $\frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} > 1$

Aにおいて時間 $\Delta\tau_A$ が経過する現象をBで観測すると、 $\Delta\tau_B (> \Delta\tau_A)$ の間、経過するように見える。

また.. Aで ν_A の振動数をもつ光子はBで ν_B として観測
→ $\nu_A > \nu_B$ (重力赤方偏位)

▶ 物体の運動の保存量 (§3, p.35)

- ・ $m \neq 0$ の物体の運動 (重力以外は働かないとする)
- ・ ϕ は球対称

(i) $\phi_0 = \text{const.}$

保存量 \mathcal{P}_0 は何か?

\mathcal{P}_μ : 物体の4元運動量
訂正 $-\frac{m}{1 + \frac{\phi}{c^2}}$
訂正 $-c^2(1 + \frac{\phi}{c^2})$

訂正 $m^2 c^2 \downarrow m^2 c^2$

$$-m^2 c^2 = \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}_\mu = g_{\alpha\beta} \mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}^\beta = -c^2(1 + \frac{2\phi}{c^2})(\mathcal{P}^0)^2 + (1 - \frac{2\phi}{c^2}) |\mathcal{P}|^2$$

訂正 $(\mathcal{P}^0)^2$ と $(c\mathcal{P}^0)^2$

訂正 $\mathcal{P}^\mu = (\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3)$
訂正 $\mathcal{P}^\mu = (\frac{\mathcal{P}^0}{c}, \mathcal{P})$

EEP $|\mathcal{P}|^2 \ll (mc)^2$

$$\rightarrow (c\mathcal{P}^0)^2 \doteq m^2 c^2 \left(1 - \frac{2\phi}{c^2} + \frac{|\mathcal{P}|^2}{m^2 c^2}\right)$$

$$\mathcal{P}^0 \doteq m \cdot \left(1 - \frac{\phi}{c^2} + \frac{|\mathcal{P}|^2}{2m^2 c^2}\right) \quad \left(\because \left|\frac{\phi}{c^2}\right| \ll 1, \frac{|\mathcal{P}|}{mc} \ll 1\right)$$

$$\mathcal{P}_0 = g_{0\mu} \mathcal{P}^\mu = g_{00} \mathcal{P}^0 \doteq -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \cdot m \cdot \left(1 - \frac{\phi}{c^2} + \frac{|\mathcal{P}|^2}{2m^2 c^2}\right)$$

$$\doteq -\frac{1}{c} \left(mc^2 + m\phi + \frac{|\mathcal{P}|^2}{2m} \right)$$

↑ 静止エネルギー ↑ 重力エネルギー ← 運動エネルギー

(ii) 重力源のまわりの方位角 φ に対し、

$$\partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0 \quad (dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$

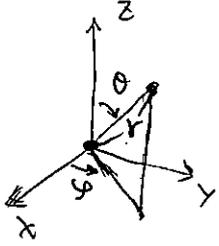
↓
 $\mathcal{P}_\varphi = \text{定数}$

$$\mathcal{P}_\varphi = g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} = (1 - \frac{2\phi}{c^2}) \cdot r^2 \sin^2 \theta \cdot m \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\equiv m (r \sin \theta)^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

↑ 角速度 Ω

↓
物体の角運動量

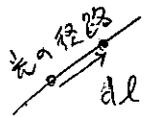


▶ 光線の湾曲

光の経路 (null)

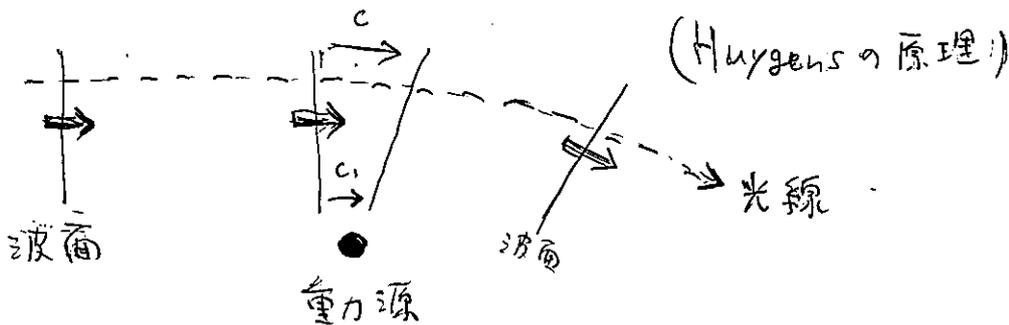
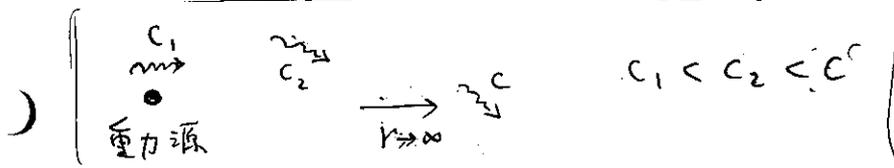
$$ds^2 = - (1 + \frac{2\phi}{c^2}) c^2 dt^2 + (1 - \frac{2\phi}{c^2}) (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



$$\Rightarrow \frac{1}{c} \cdot \frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2\phi}{c^2}}{1 - \frac{2\phi}{c^2}}} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} < 1 \quad (\phi < 0)$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\phi \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty) \text{ から見た光の移動距離}}{\phi \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty) \text{ から見た経過時間}} = r \rightarrow \infty \text{ の観測者が見た光速}$$



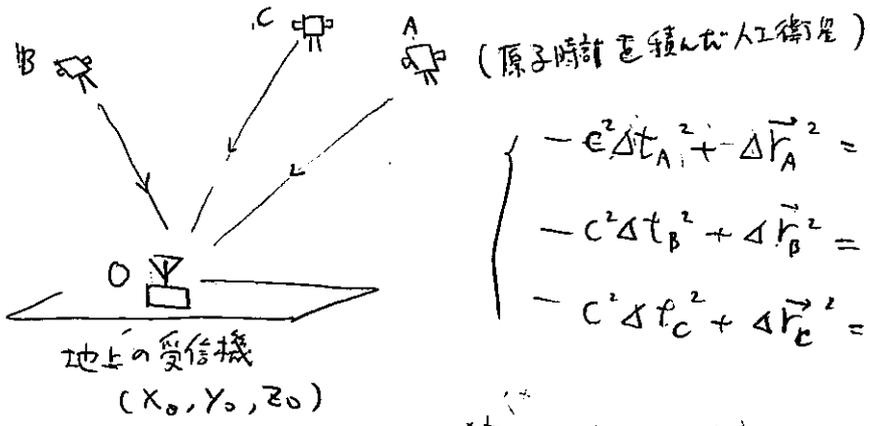
$$\text{屈折率 } n = \sqrt{\frac{1 - \frac{2\phi}{c^2}}{1 + \frac{2\phi}{c^2}}} \text{ の媒質による屈折 (重力レンズ)}$$

GPS と 相対論

(Nir Ashby, Physics Today, 2002, 5
 N. アシビー, パリティ, 2003. 6)

Global Positioning System (GPS) は (特殊 & 一般) 相対論を応用している。

① 位置決定の原理 (光速一定の原理)



$$\begin{cases} -c^2 \Delta t_A^2 + \Delta \vec{r}_A^2 = 0 \\ -c^2 \Delta t_B^2 + \Delta \vec{r}_B^2 = 0 \\ -c^2 \Delta t_C^2 + \Delta \vec{r}_C^2 = 0 \end{cases}$$

$\Delta t_A = t_0 - t_A'$ (A の電波を受信した時刻 - 観測時刻)

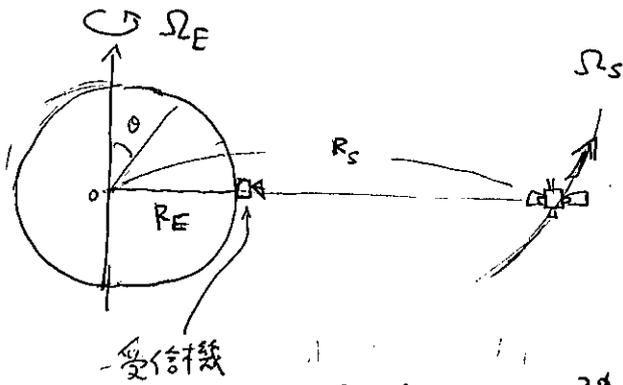
$\Delta \vec{r}_A = (x_A - x_0, y_A - y_0, z_A - z_0)$

$\Delta t_A, x_A$ などが決まると、上の式を連立して (x_0, y_0, z_0) が決まる

② 補正

- 人工衛星は受信機に宛てて運動している
 - 地上の受信器と衛星の高さによる重力ポテンシャルの違い
- 時計の遅れ(進み)

補正の概算



$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$\downarrow$$

$$dt^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

t : 座標時間 ($r \rightarrow \infty$ の仮想的観測者の固有時)

地表赤道上で静止する受信器の固有時 $d\tau_E$

$$c^2 d\tau_E^2 = \left(1 + \frac{2\phi_E}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi_E}{c^2}\right) r^2 d\varphi^2 \quad \left(dr=0, d\theta=0 \right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\phi_E = -\frac{GM_E}{R_E} \right)$$

$$= c^2 dt^2 \left\{ \left(1 + \frac{2\phi_E}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{2\phi_E}{c^2}\right) \frac{R_E^2 \Omega_E^2}{c^2} \right\}$$

衛星 (円軌道, 角速度 Ω_S) の固有時 $d\tau_S$

$$d\tau_S^2 = dt^2 \left\{ \left(1 + \frac{2\phi_S}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{2\phi_S}{c^2}\right) \frac{R_S^2 \Omega_S^2}{c^2} \right\}$$

$$\left(\phi_S = -\frac{GM_E}{R_S} \right)$$

よって

$$\frac{d\tau_E^2}{d\tau_S^2} = \frac{1 + \frac{2\phi_E}{c^2} - \left(1 - \frac{2\phi_E}{c^2}\right) \frac{R_E^2 \Omega_E^2}{c^2}}{1 + \frac{2\phi_S}{c^2} - \left(1 - \frac{2\phi_S}{c^2}\right) \frac{R_S^2 \Omega_S^2}{c^2}}$$

$$\therefore \frac{d\tau_E}{d\tau_S} \approx 1 + \frac{GM_E}{R_S c^2} + \frac{R_S^2 \Omega_S^2}{2c^2} - \frac{GM_E}{R_E c^2} - \frac{R_E^2 \Omega_E^2}{2c^2}$$

($\frac{R^2 \Omega^2}{c^2}$ 項は高次なので無視)

$$M_E = 6.0 \times 10^{27} \text{ g}, \quad R_E = 6.4 \times 10^3 \text{ km}$$

$$R_S = 2.9 \times 10^4 \text{ km} \quad \left(\Omega_S^2 = \frac{GM_E}{R_S^3} \right) \text{ Kepler運動}$$

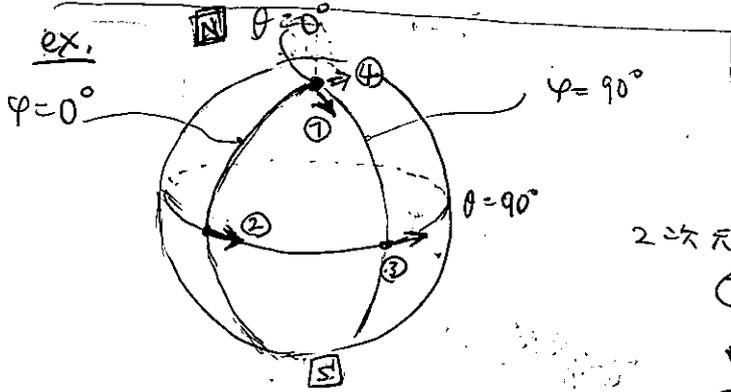
よって

$$\frac{d\tau_E}{d\tau_S} - 1 = -4.4 \times 10^{-10} \rightarrow \text{1日あたり } 38 \mu\text{s}$$

$\Rightarrow c \times 38 (\mu\text{s}) = 11 \text{ km}$ の誤差/日!

§4 曲率

曲面上の開曲線に沿って任意のベクトルを平行移動



↓
一般に移動前後のベクトルは重ならぬ

2次元球面上で

- ① $\theta = \varphi = 0^\circ$ で $\varphi = 90^\circ$ 方向へ向くベクトル
- ↓
- ② $\varphi = 0^\circ$ に沿って $\theta = 90^\circ$ まで平行移動
- ↓
- ③ $\theta = 90^\circ$ に沿って $\varphi = 90^\circ$ まで
- ↓
- ④ $\varphi = 90^\circ$ に沿って $\theta = 0^\circ$ まで

逆に、開曲線に沿って
平行移動したベクトル
が元のベクトルに重ならぬ
性質を使って、空間の“曲がり方”を定義

⇒ 曲率テンソル

4-1 Riemann テンソル

- 平行移動 \Leftrightarrow 接続 (共変微分)
- 開曲線に沿った移動 \Leftrightarrow 微分の交換

ベクトルの異なる方向への共変微分の交換を考察してみよう。

* スカラー量については可換

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad \nabla_\mu \psi &= \partial_\mu \psi \rightarrow \nabla_\nu \nabla_\mu \psi = \nabla_\nu (\partial_\mu \psi) = \partial_\nu (\partial_\mu \psi) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \psi \\
 &= \partial_\mu (\partial_\nu \psi) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda \psi \\
 &= \nabla_\mu (\nabla_\nu \psi) =
 \end{aligned}$$

(1) $\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu$

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu &= \nabla_\alpha (\nabla_\beta V^\mu) = \partial_\alpha (\nabla_\beta V^\mu) - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda (\nabla_\lambda V^\mu) + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu (\nabla_\beta V^\lambda) \\ &= \partial_\alpha (\partial_\beta V^\mu + \Gamma_{\nu\beta}^\mu V^\nu) - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda (\partial_\lambda V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu) + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu (\partial_\beta V^\lambda + \Gamma_{\nu\beta}^\lambda V^\nu) \\ &= \partial_\alpha \partial_\beta V^\mu + \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu V^\nu + \Gamma_{\nu\beta}^\mu \partial_\alpha V^\nu - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \partial_\lambda V^\mu - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu \partial_\beta V^\lambda + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda V^\nu \end{aligned}$$

$\alpha \leftrightarrow \beta$

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = \partial_\beta \partial_\alpha V^\mu + \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \partial_\beta V^\nu - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda V^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu + \Gamma_{\lambda\beta}^\mu \partial_\alpha V^\lambda + \Gamma_{\lambda\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda V^\nu$$

$$\begin{aligned} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) V^\mu &= (\partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda) V^\nu \\ &\equiv R^\mu_{\nu\alpha\beta} \cdot V^\nu \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

①の左辺はAA5から (1) $\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu$ のため、右辺も (1) $\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu$

V^ν は任意なベクトル。 $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ は (1) $\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu$ の係数

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \quad \textcircled{2}$$

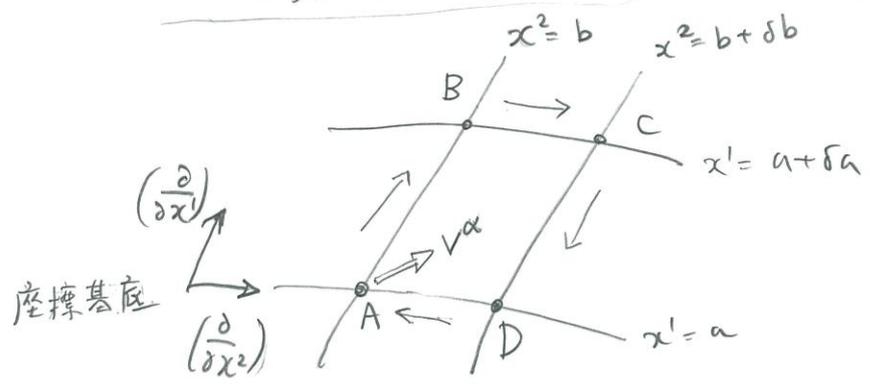
$[R^\mu_{\nu\alpha\beta}] = [L]^{-2}$

§4-2

曲率テンソル (Riemann テンソル)

4-2 Riemann テンソルとベクトルの平行移動

視点を変えて、ベクトルを閉曲線で平行移動した
場合を考える。



多様体上で、座標 $x^i = \text{一定}$
 $x^2 = \text{一定}$
 のような閉曲線 ABCD
 に沿って任意のベクトル V を
 平行移動する。

$V^\alpha(A)$ と $ABCD$ に沿って平行移動した結果のベクトルを $V_{\parallel}^\alpha(A)$ とする。

$$V_{\parallel}^\alpha(A) - V^\alpha(A) \equiv \delta V^\alpha(A) \quad (\text{同一の点でのベクトルの差をのび、} \delta V \text{ もベクトル})$$

この δV^α の表式を求める。

$A \rightarrow B, C \rightarrow D$ の経路では $(\frac{\partial}{\partial x^1})$ に沿って平行移動 ($x^2 = \text{一定}$)

$$\nabla_{(\frac{\partial}{\partial x^1})} V^\alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} + \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu = 0$$

(基底ベクトル $(\frac{\partial}{\partial x^1})$ に沿って V^α は平行移動)

$$\Downarrow \quad \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu \quad (3)$$

(3) を $A \rightarrow B$ で積分

$$V^\alpha(B) = V^\alpha(A) - \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \Big|_{x^2=b} \quad (4)$$

同様に

$B \rightarrow C$

$$V^\alpha(C) = V^\alpha(B) - \int_B^C \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \Big|_{x^1=a+\delta a} \quad (5)$$

$C \rightarrow D$

$$V^\alpha(D) = V^\alpha(C) - \int_C^D \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \Big|_{x^2=b+\delta b}$$

$$= V^\alpha(C) + \int_D^C \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \Big|_{x^2=b+\delta b} \quad (6)$$

$D \rightarrow A$

$$V_{\parallel}^\alpha(A) = V^\alpha(D) + \int_A^D \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \Big|_{x^1=a} \quad (7)$$

④ - ⑦ を辺々足す。

④

$$\delta V^\alpha(A) = \int_A^D \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \Big|_{x^1=a} + \int_D^C \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \Big|_{x^2=b+\delta b}$$

$$- \int_B^C \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \Big|_{x^1=a+\delta a} - \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \Big|_{x^2=b} \quad (8)$$

②③④

$$- \int_B^C \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \Big|_{x^1=a+\delta a} = - \left[\int_A^D \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \Big|_{x^1=a} + \delta a \cdot \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \int_A^D \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \Big|_{x^1=a} \right\} \right] + O(\delta a)^2$$

$x^1=a$ の周りで Taylor 展開

$$\int_D^C \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \Big|_{x^2=b+\delta b} = \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \Big|_{x^2=b} + \delta b \cdot \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \Big|_{x^2=b} \right\} + O(\delta b)^2$$

$$\therefore \delta V^\alpha(A) = -\delta a \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \int_A^D \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \Big|_{x^1=a} \right\} + \delta b \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \Big|_{x^2=b} \right\} + O(\delta a)^2 + O(\delta b)^2$$

更12

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \int_A^D \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 = \int_A^D \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) dx^2 = \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) \cdot \delta b + O(\delta b)^2$$

など... かし。

$$\textcircled{9} \Rightarrow \delta V^\alpha = -\delta a \cdot \delta b \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu) \right\} + O(3) \quad (10)$$

⑩ の $\frac{\partial}{\partial x^i} (\dots)$ をさらに展開。

$(\delta a)^2, (\delta b)^2$ etc.

$$\frac{\partial}{\partial x^1} V^\mu = -\Gamma_{\beta 1}^\mu V^\beta \quad (\text{平行移動力!})$$

さらに使用法を整理する。更なる座標「1」=「 κ 」, 「2」=「 λ 」と置く。1, 2, 4, 7, 8

$$\delta V^\alpha = \delta a \cdot \delta b \cdot V^\beta \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \Gamma_{\beta \kappa}^\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\beta \lambda}^\alpha + \Gamma_{\mu \lambda}^\alpha \Gamma_{\beta \kappa}^\mu - \Gamma_{\mu \kappa}^\alpha \Gamma_{\beta \lambda}^\mu \right\}$$

$$R_{\beta \lambda \kappa}^\alpha$$

⑪

4-3 Riemann テンソルの対称性.

(i) 表式②より.

$$\underline{R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}} = -\underline{R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}} \quad (12)$$

(ii), ②より

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \cancel{\partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}} - \cancel{\partial_{\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}} + \cancel{\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta}} - \cancel{\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\alpha}}$$

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\nu} = \cancel{\partial_{\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}} - \cancel{\partial_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}} + \cancel{\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\nu}} - \cancel{\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}}$$

$$R^{\mu}{}_{\beta\nu\alpha} = \cancel{\partial_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}} - \cancel{\partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}} + \cancel{\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\alpha}} - \cancel{\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu}}$$

(+)

$$\underline{R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}} + \underline{R^{\mu}{}_{\alpha\beta\nu}} + \underline{R^{\mu}{}_{\beta\nu\alpha}} = 0 \quad (13)$$

サイクリックに置換

(iii) ②より添字 $\mu \in T_H$ として

$$R_{\gamma\nu\alpha\beta} = g_{\gamma\mu} R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = g_{\gamma\mu} \left\{ \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta} \right\} - [\alpha \leftrightarrow \beta] \quad (14)$$

222nd 次の記号を定義 (1-種 Christoffel 記号)

前2項 $\nu: \alpha \leftrightarrow \beta$
と交換した

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} \equiv g_{\gamma\mu} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\gamma\beta} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (14) : R_{\gamma\nu\alpha\beta} &= \partial_{\alpha}\Gamma_{\gamma\nu\beta} - \partial_{\alpha}g_{\gamma\mu} \cdot \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta} + \Gamma_{\gamma\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta} - [\alpha \leftrightarrow \beta] \\ &= \partial_{\alpha}\Gamma_{\gamma\nu\beta} - \partial_{\alpha}g_{\gamma\lambda} \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta} + \Gamma_{\gamma\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta} - [\alpha \leftrightarrow \beta] \end{aligned}$$

$$= \partial_{\alpha}\Gamma_{\gamma\nu\beta} + (\Gamma_{\gamma\lambda\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\gamma\lambda}) \cdot \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta} - [\alpha \leftrightarrow \beta] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (15) \text{ より } \Gamma_{\gamma\lambda\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\gamma\lambda} &= \frac{1}{2} (\partial_{\alpha}g_{\gamma\lambda} + \partial_{\lambda}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}g_{\lambda\alpha}) - \partial_{\alpha}g_{\gamma\lambda} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\lambda}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\gamma\lambda} - \partial_{\gamma}g_{\lambda\alpha}) \\ &= -\Gamma_{\lambda\gamma\alpha} \end{aligned}$$

∴ ⑬ $R_{\gamma\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\gamma\nu\beta} - \Gamma_{\lambda\gamma\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - [\alpha \leftrightarrow \beta]$

$= \partial_\alpha \Gamma_{\gamma\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma_{\gamma\nu\alpha} - \Gamma_{\lambda\gamma\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\lambda + \Gamma_{\lambda\gamma\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda$

$= \frac{1}{2} \left\{ \cancel{\partial_\alpha \partial_\beta g_{\gamma\nu}} + \partial_\alpha \partial_\nu g_{\gamma\beta} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\nu\beta} - \cancel{\partial_\beta \partial_\alpha g_{\gamma\nu}} - \partial_\beta \partial_\nu g_{\gamma\alpha} + \partial_\beta \partial_\gamma g_{\nu\alpha} \right\} - \Gamma_{\lambda\gamma\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\lambda + \Gamma_{\lambda\gamma\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda$

$= \frac{1}{2} \left\{ \partial_\alpha \partial_\nu g_{\gamma\beta} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\nu\beta} - \partial_\beta \partial_\nu g_{\gamma\alpha} + \partial_\beta \partial_\gamma g_{\nu\alpha} \right\} - g_{\lambda\kappa} \Gamma_{\gamma\alpha}^\kappa \Gamma_{\nu\beta}^\lambda + g_{\lambda\kappa} \Gamma_{\gamma\beta}^\kappa \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda$

ex. $R^0_{120} + R^0_{201} + R^0_{012} = 0$ (0 になる場合)

$\Rightarrow R_{0120} + R_{0201} = 0$

$\Rightarrow R_{2001} + R_{0201} = 0$

$\Rightarrow R_{2001} = -R_{0201} \Rightarrow$ ⑬ の条件より 異なる

R^0_{123} の条件は異なる

2(3) = 15

§4-⑩ 1 組合せは +6 = 21

2(3) となる場合の組合せ = 30

(01) となる場合 = 6

$6C_2 = 15$

§5-⑩ (10201)

⚠ ⑫, ⑬, ⑮, ⑯ 及び $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$

⑫, ⑮ より $(\alpha\beta), (\gamma\delta)$ の組に対してそれぞれ 6 通り

よって ⑯ より $\frac{6C_2}{2} + 6^{\leftarrow 0101 \text{ なる}} = 21$ 通り

⑬ は $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ が $(0, 1, 2, 3)$ の置換の条件が 1

$21 - 1 = 20$ 個が独立

7-4 Bianchi の恒等式 (Bianchi's identity)

• まず、1形式に $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ の作用をせよとせよ

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \omega_\gamma = -R^\lambda{}_{\gamma\alpha\beta} \omega_\lambda \quad (20)$$

*) $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] (\omega_\gamma V^\delta) = 0$ ($\omega_\gamma V^\delta$ はスカラー)

$\Rightarrow V^\delta [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \omega_\gamma + \omega_\gamma [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\delta = 0$ (Leibnitz)

$\Rightarrow V^\delta [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \omega_\gamma + \omega_\gamma R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} V^\mu = 0$

V^γ は任意 $\Rightarrow [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \omega_\gamma + R^\lambda{}_{\gamma\alpha\beta} \omega_\lambda = 0$

• 次に、(1) テンソルであるテンソル積 $\sigma^\lambda \omega_\nu$ について

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] (\sigma^\lambda \omega_\nu) = R^\lambda{}_{\lambda\alpha\beta} \sigma^\lambda \omega_\nu - R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} \sigma^\lambda \omega_\nu \quad (21)$$

(1) $\nabla_\nu V^\lambda$ に $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ の作用

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \nabla_\nu V^\lambda = R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} \nabla_\nu V^\lambda - R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} \nabla_\lambda V^\mu \quad (22)$$

(2) $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\lambda$ に ∇_ν の作用

$$\nabla_\nu ([\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\lambda) = \nabla_\nu (R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} V^\lambda) = \nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} \cdot V^\lambda + R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} \cdot \nabla_\nu V^\lambda \quad (23)$$

(3) (23) - (22) より

$$[\nabla_\nu, [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]] V^\lambda = \nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} \cdot V^\lambda + R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} \cdot \nabla_\lambda V^\mu \quad (24)$$

(4) (24) を ν, α, β に対して変えて足す

$$\begin{aligned} & ([\nabla_\nu, [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]] + [\nabla_\alpha, [\nabla_\beta, \nabla_\nu]] + [\nabla_\beta, [\nabla_\nu, \nabla_\alpha]]) V^\lambda \\ &= V^\lambda (\nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} + \nabla_\alpha R^\mu{}_{\lambda\beta\nu} + \nabla_\beta R^\mu{}_{\lambda\nu\alpha}) \\ &+ \nabla_\lambda V^\mu (R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} + R^\lambda{}_{\alpha\beta\nu} + R^\lambda{}_{\beta\nu\alpha}) \end{aligned} \quad (25)$$

(5) 一般に、演算子 X, Y, Z は交換子

$$[X, Y] \equiv XY - YX = -[Y, X]$$

を定義するときは、

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (26)$$

Jacobi の恒等式

(cf. 量子力学の角運動量 Lie 代数)

(6) (25) の左辺 = 0 なる恒等的に成立

右辺の2項は (3) から 0

$$\therefore \nabla_\nu R^\mu_{\lambda\alpha\beta} + \nabla_\alpha R^\mu_{\lambda\beta\nu} + \nabla_\beta R^\mu_{\lambda\nu\alpha} = 0 \quad (27)$$

Bianchi の恒等式

4-5 Ricci テンソル, スカラー曲率, Einstein テンソル

[Ricci テンソル]

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad (28)$$

[スカラー曲率 (Ricci スカラー)]

$$R \equiv R^\mu_{\mu} = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \quad (29)$$

[Einstein テンソル]

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (30)$$

⚠ Ricci テンソル, Einstein テンソルは対称テンソル

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}$$

上式の第三項以外は明らかに $\mu \leftrightarrow \nu$ の λ を交換して対称

第三項: $-\partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = -\partial_{\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} (\partial_{\mu} g_{\kappa\alpha} + \partial_{\alpha} g_{\kappa\mu} - \partial_{\kappa} g_{\mu\alpha}) \right]$

$\begin{matrix} \curvearrowright & & \curvearrowright \\ & = \text{打ち消す} = & \end{matrix}$

$$\equiv -\frac{1}{2} \partial_{\nu} [g^{\alpha\kappa} \partial_{\mu} g_{\kappa\alpha}]$$

$$= -\partial_{\nu} \partial_{\mu} \ln \sqrt{-g} \quad (\text{Christoffel 記法の便利な公式})$$

これは $\mu \leftrightarrow \nu$ を交換して対称.

よって $R_{\mu\nu}$ は対称テンソル

4-6 縮約された Bianchi の恒等式

②⑦ より

$$\nabla_{\nu} R^{\beta}{}_{\lambda\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} R^{\beta}{}_{\lambda\beta\nu} + \nabla_{\beta} R^{\beta}{}_{\lambda\nu\alpha} = 0$$

$$-\nabla_{\nu} R_{\lambda\alpha} + \nabla_{\alpha} R_{\lambda\nu} + \nabla_{\beta} R^{\beta}{}_{\lambda\nu\alpha} = 0$$

$\times g^{\lambda\nu}$

$$-\nabla_{\lambda} R^{\lambda}{}_{\alpha} + \nabla_{\alpha} R + \nabla_{\beta} R^{\beta\lambda}{}_{\nu\alpha} = 0$$

$$-\nabla_{\lambda} R^{\lambda}{}_{\alpha} + \nabla_{\alpha} R - \nabla_{\beta} R^{\nu\beta\lambda}{}_{\nu\alpha} = 0$$

$\left(\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0 \text{ なる } \right)$

$$-\nabla_{\lambda} R^{\lambda}{}_{\alpha} + \nabla_{\alpha} R - \nabla^{\beta} R^{\nu}{}_{\beta\nu\alpha} = 0$$

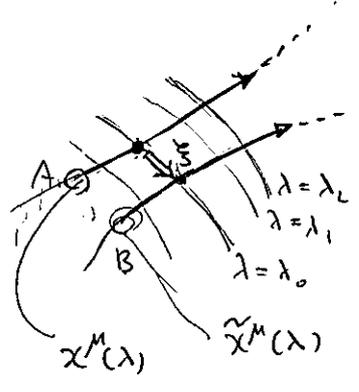
$$-\nabla_{\lambda} R^{\lambda}{}_{\alpha} + \nabla_{\alpha} R - \nabla^{\beta} R_{\beta\alpha} = 0$$

$$-2\nabla_{\lambda} R^{\lambda}{}_{\alpha} + \nabla_{\alpha} R = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\lambda} (R^{\lambda}{}_{\alpha} - \frac{1}{2} \delta^{\lambda}_{\alpha} R) = 0 \quad \text{③①}$$

$$\therefore \nabla_{\lambda} G^{\lambda}{}_{\alpha} = 0 \quad \text{③②} \quad \left(G^{\mu}{}_{\alpha} = g^{\mu\lambda} G_{\lambda\alpha} = R^{\mu}{}_{\alpha} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\alpha} R \right)$$

4-7 測地線偏差の方程式

近接する測地線を延長すると、どう振舞うか論へたり



同じアフィンパラメータを共有する2つの測地線

A: $x^M = x^M(\tau)$

B: $x^M = \tilde{x}^M(\tau) = x^M(\tau) + \xi^M(\tau)$

∴ ξ^M は微小量 とする. ($|\xi| \ll |x|$)

A, B はそれぞれ測地線なので:

A: $\frac{d^2 x^M}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^M [x^\alpha(\tau)] \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$ (33)

B: $\frac{d^2 \tilde{x}^M}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^M [\tilde{x}^\alpha(\tau)] \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau} \frac{d\tilde{x}^\lambda}{d\tau} = 0$ (34)

B ⇒ $\frac{d^2 \tilde{x}^M}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^M}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^M [x^\alpha + \xi^\alpha] \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\lambda}{d\tau} + \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} \right) = 0$ (35)

∴ B-A: $\frac{d^2 \xi^M}{d\tau^2} + \left(\Gamma_{\nu\lambda}^M [x^\alpha] + \partial_\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^M \xi^\alpha + \mathcal{O}(|\xi|^2) \right)$

$\times \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \right) \times \left(\frac{dx^\lambda}{d\tau} + \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} \right)$

$- \Gamma_{\nu\lambda}^M [x^\alpha] \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$ (36)

$\frac{d^2 \xi^M}{d\tau^2} + \partial_\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^M \xi^\alpha \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^M \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^M \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \mathcal{O}(|\xi|^2) = 0$

⇒ $\frac{d^2 \xi^M}{d\tau^2} + \partial_\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^M \xi^\alpha \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + 2 \Gamma_{\nu\lambda}^M \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} = \mathcal{O}(|\xi|^2)$ (37)

二二. 測地線に沿うた速度 \$V^\mu\$ の微分 \$\frac{D}{D\tau}\$ は

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} V^\mu &\equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \nabla_\alpha V^\mu = \frac{dx^\alpha}{d\tau} (\partial_\alpha V^\mu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\nu) \\ &= \frac{d}{d\tau} V^\mu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (35) \end{aligned}$$

と33c.

$$\frac{D}{D\tau} \left(\frac{D}{D\tau} \xi^\mu \right) = \frac{D}{D\tau} \left(\frac{d}{d\tau} \xi^\mu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \xi^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)$$

$$= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d}{d\tau} \xi^\mu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \xi^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)$$

$$+ \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \left(\frac{d}{d\tau} \xi^\beta + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \xi^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \frac{dx^\kappa}{d\tau}$$

$$= \frac{d^2}{d\tau^2} \xi^\mu + \frac{d}{d\tau} \left(\Gamma_{\nu\alpha}^\mu \xi^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \frac{d\xi^\beta}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \xi^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau}$$

$$= \frac{d^2}{d\tau^2} \xi^\mu + \frac{d}{d\tau} \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \xi^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \xi^\nu \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \frac{d\xi^\beta}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \xi^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau}$$

$$\frac{dx^\beta}{d\tau} \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu$$

$$\Gamma_{\beta\kappa}^\mu \frac{d\xi^\beta}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \xi^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau}$$

$$- \Gamma_{\kappa\lambda}^\alpha \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

$$= \left[\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^\mu + \partial_\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\nu \frac{dx^\lambda}{d\tau} + 2 \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} \right]$$

$$- \partial_\nu \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

$$- \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \xi^\nu \Gamma_{\kappa\lambda}^\alpha \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \xi^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau}$$

$$= \left[\partial_\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\mu \Gamma_{\lambda\alpha}^\beta \right] \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\nu \frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

$$= -R^\mu_{\lambda\nu\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\nu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \quad (39)$$

$$\frac{D^2}{D\tau^2} \xi^\mu + R^\mu_{\lambda\nu\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\nu \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (40)$$

測地線偏差の方程式

§5 Einstein 方程式

◎ 「重力」とは何か?

測地線 = 重力場中の自由粒子の運動

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

↑ 「重力」の効果を表す。

• $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$; $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ x^μ : Cartesian 座標 (t, x, y, z)

→ $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0 \Rightarrow$ 重力のない時空

では、Cartesian 以外の座標を Minkowski で使った?

(t, x, y, z) → (t, R, Y, Z)

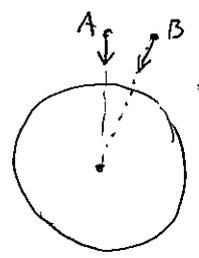
$ds^2 = \tilde{\eta}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu$ $\tilde{x}^\mu = (t, R, Y, Z)$

= -dt² + dR² + R²dY² + dZ²

$\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & R^2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

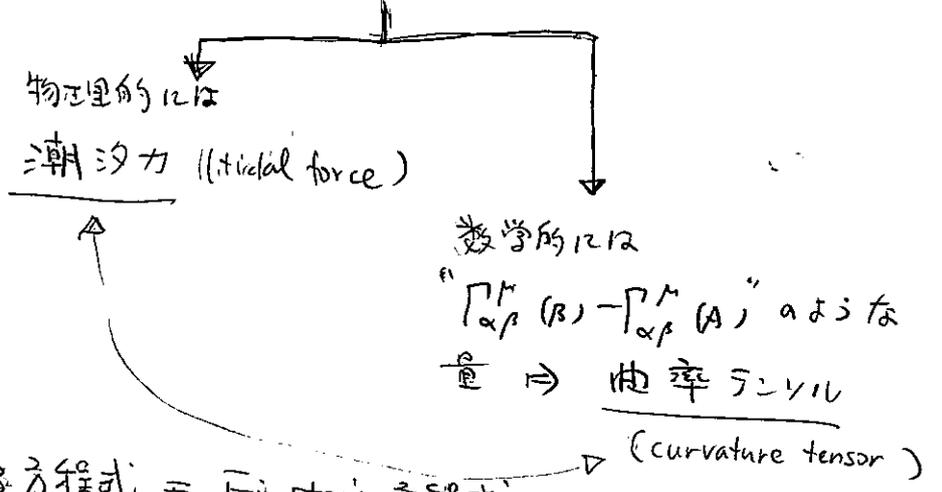
→ $\Gamma_{RY}^Y = \Gamma_{YR}^Y = \frac{1}{R} \Rightarrow$ 重力が存在?

座標変換で消えなような「重力の効果」を考えたい。



A と B における重力の効果は座標変換で同時に消えな

→ A と B における重力加速度の差が「重力の本体」?



時空の曲率を決める方程式 = Einstein 方程式

5-1 Einstein 方程式

cf. (Newton) $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$ ①

↑ 3次元スカラー重力ポテンシャル

↑ 質量密度

§2. ②8 で見たおりに相対論的な場合、 $g_{\mu\nu}$ が重力ポテンシャルに相当する。

① を相対論的に拡張するには、

- a) 左辺は $g_{\mu\nu}$ の二階微分を含む テンソル .
- b) 右辺は 質量密度 ρ を、質量(エネルギー)密度を表す テンソル量 で置き換える。
- c) 重力源(物質)の満たす方程式と矛盾しない。

b) $\rho \rightarrow T_{\mu\nu}$ (重力源の全てのエネルギー、運動量を表すテンソル)

a) $g_{\mu\nu}$ の二階微分を含む二階テンソル

$R_{\mu\nu} \rightarrow X$

$G_{\mu\nu} \rightarrow 0$

もし $R_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$ とすると。(k: 定数)

$\nabla^\nu R_{\mu\nu} = k \nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ ($\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ (S.R.) \Rightarrow $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ (G.R.))

($T_{\mu\nu}$ の保存則)

$\partial_\alpha \Rightarrow \nabla_\alpha$

すると 縮約した Bianchi の恒等式 $\nabla^\nu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu R$ のより

$\nabla_\mu R = k \nabla_\mu T = 0 \Rightarrow T = T^\alpha_\alpha = \text{const.} ??$

一方: $G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$ とすると。

一般には成立しない
X

$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0$ (Bianchi) が恒等的なため

$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ は自動的に成立 ("保存則")

$G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$ ②

これが重力場の方程式になる。

κ の値

(B)

κ の値を定めるために、再び 遅い運動、時間依存しない、弱い重力の系を考慮

Newton 極限

完全流体を重力源とすると

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (3)$$

Newton 極限では $\rho \gg p$

(c) をあがさずに書くと $\rho c^2 \gg p$
つまり、質量エネルギーは流体の圧力より十分大きい
+ ...

そこで (3) は

$$T_{\mu\nu} \approx \rho u_\mu u_\nu \quad (4)$$

流体の静止系では

$$u^\mu = (u^0, 0, 0, 0) \quad (5)$$

また

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (6)$$

($|h| \ll 1$)

$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$

すると (5) と $u^\mu u_\mu = -1$ より

$$-1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) u^\mu u^\nu = (-1 + h_{00}) (u^0)^2$$

$$\therefore u^0 = [1 - h_{00}]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} h_{00} \quad (7)$$

また

$$u_0 = g_{0\mu} u^\mu = g_{00} u^0 = (-1 + h_{00}) u^0 \approx -1 + \frac{1}{2} h_{00} \quad (8)$$

よって

$$(20) \Rightarrow T_{00} \approx \rho (u_0)^2 = \rho (-1 + \frac{1}{2} h_{00})^2 \approx \rho - \rho h_{00} + O(h^2) \quad (9)$$

よって

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = g^{00} T_{00} \approx (-1 - h_{00}) (\rho - \rho h_{00}) \approx -\rho + O(h^2) \quad (10)$$

222. (2) を書き直すと

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

(2) の trace をとると:

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (11)$$

$$\left(R - \frac{1}{2} R \cdot 4 = \kappa T \right)$$

(11) の (00) 成分 $R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right) = \kappa \left(\rho - \rho h_{00} - \frac{1}{2} (-\rho) \cdot (-1 + h_{00}) \right)$

$$= \frac{1}{2} \kappa \rho + O(h^1) \quad (12)$$

(12) を調べる。

(左辺) $R_{00} = R^M_{00} = R^i_{0i0}$ (0 は反対称性から現れない)

$$R_{00} = R^M_{00} = R^i_{0i0}$$

$$= \partial_i \Gamma^i_{00} - \cancel{\partial_0 \Gamma^i_{i0}} + \Gamma^i_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{00} - \Gamma_{0\alpha}^i \Gamma^{\alpha}_{i0}$$

Γ は h の 1-次式 $\Rightarrow \Gamma^i_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{00} = O(h^1)$

$\Gamma_{0\alpha}^i \Gamma^{\alpha}_{i0} = O(h^2)$

$\therefore R_{00} = \partial_i \Gamma^i_{00} + O(h^2)$

$$= \partial_i \left\{ \frac{1}{2} g^{i\alpha} (\partial_0 g_{\alpha 0} + \partial_0 g_{0\alpha} - \partial_\alpha g_{00}) \right\}$$

$\begin{cases} g^{i0} = 0 \\ g^{ij} = \delta^{ij} \end{cases}$

$$= -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i g_{j0}$$

$$= -\frac{1}{2} \Delta h_{00} \quad (\Delta = \nabla^i \nabla_i) \quad (13)$$

\therefore (12) は

$$\Delta h_{00} = -\kappa \rho \quad (14)$$

と書ける

223 or. §2.1 の [38] より $h_{00} = -2\Phi$ と定義する

Newton の重力ポテンシャル

(14) は

$$\Delta \Phi = \frac{1}{2} \kappa \rho \quad (15)$$

(15) と Newton 重力の Poisson 方程式

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad \text{を比べる}$$

$$\boxed{\kappa = 8\pi G} \quad (16)$$

まとめ

Einstein 方程式は $G=1, c=1$ とし

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (17)$$

$$\text{または } R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (18)$$

G, c を露わに書く

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (19)$$

* (19) の両辺の次元を確認

$$\begin{aligned} \text{(左)} \quad [G_{\mu\nu}] &= [R_{\mu\nu}] = [R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}] = [\partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}] = [\partial_{\mu} \partial_{\nu} g_{\alpha\beta}] \\ &= [L]^{-2} \end{aligned}$$

$$\text{(右)} \quad [T_{\mu\nu}] = [\text{Energy/volume}] = [M][L]^{-1}[T]^{-2}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right] &= \underbrace{[M]^{-1} \cdot [L]^3 \cdot [T]^{-2}}_G \cdot \underbrace{[L]^{-4} [T]^4}_{c^{-4}} \cdot \underbrace{[M][L]^{-1}[T]^{-2}}_{T_{\mu\nu}} \\ &= [L]^{-2} \end{aligned}$$

5-2 宇宙項

② において、左辺に $\Lambda \cdot g_{\mu\nu}$ (Λ : 定数) のような項をつけ加え
ると、

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0 \iff \nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$$

の関係は成り立つ ($\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$)

すると、Einstein 方程式は

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (20)$$

のように拡張できる。

$$(20) \Rightarrow G_{\mu\nu} = 8\pi (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\Lambda)}) \quad ; \quad T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} \equiv -\frac{\Lambda}{8\pi} g_{\mu\nu}$$

と書くと、 $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)}$ を「真空のエネルギー-運動量テンソル」と見なせる。

・完全流体と比較

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \underbrace{(\rho_\Lambda + p_\Lambda)}_0 u_\mu u_\nu + p_\Lambda g_{\mu\nu} \quad -\frac{\Lambda}{8\pi}$$

$$\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad p_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi} \quad \text{のよりの"流体"と等価}$$

* Einstein は宇宙項を「静止」宇宙を作るために導入

通常の物質の重力と釣り合う斥力(反重力)項

⇒ 膨張宇宙の発見で「否定」

現在は宇宙の加速的膨張の発見により見直されている (2011年ノーベル賞)

観測からの制限

$$\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \lesssim 2 \times 10^{-9} \text{ erg/cm}^3$$

5-3 変分原理による Einstein 方程式の "導出" (Einstein-Hilbert 作用)

4次元の n 変作用積分

$$S = \int \underbrace{L}_{\substack{\text{Lagrangian} \\ \text{密度}}} \cdot \underbrace{\sqrt{-g} d^4x}_{\substack{\text{4元の R 不変な} \\ \text{体積要素}}} ; d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

* 次元について

$$\left. \begin{aligned} & \text{作用積分 } S \text{ の次元は } [E][T] = [M][L]^2[T]^{-1} \\ & \sqrt{-g} d^4x \text{ の次元 (} dx^0 = c dt \text{) は } [L]^4 \\ & \rightarrow L \text{ の次元は } [M][L]^{-2}[T]^{-1} \end{aligned} \right\}$$

$$L = L_m + L_G \quad L_m: \text{重力以外の物質部分} \\ L_G: \text{重力の部分}$$

▷ L_m は 物質場の変数 ϕ とその微分 $\nabla_\mu \phi$ の関数 (* ϕ は一般にテンソル量
- of. 電磁場: A^α)

$$\delta S_m = \delta \int L_m \sqrt{-g} d^4x = 0$$

$$\rightarrow \delta \int \left(\frac{\partial L_m}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial L_m}{\partial \nabla_\mu \phi} \right) \right) \delta \phi \sqrt{-g} d^4x = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_\mu \left(\frac{\partial L_m}{\partial \nabla_\mu \phi} \right) - \frac{\partial L_m}{\partial \phi} = 0 \quad \text{物質場の Euler-Lagrange eq.} \\ \text{(物質場の運動方程式)}$$

i) L_G : 計量 $g_{\mu\nu}$ とその“微分”の汎関数
 \hookrightarrow \triangle 共変微分ではない ($\nabla g_{\mu\nu} = 0$)
 $(\Rightarrow \Gamma_{\nu\lambda}^\mu)$

$L_G \propto R$ (Ricci スカラー) ($L_G = \frac{c^3}{16\pi G} R$)
 \uparrow Ricci スカラー

$S_H \equiv \int R \sqrt{-g} d^4x$ (Einstein-Hilbert 作用) を時空の変数 $g^{\mu\nu}$ で変分.
 ($\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}$ を用いる)

$S_H = \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$ ①

$\delta S_H = \underbrace{\int \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x}_{\delta S_1} + \underbrace{\int g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x}_{\delta S_2} + \underbrace{\int R \delta \sqrt{-g} d^4x}_{\delta S_3}$ ②

δS_2

$\delta R_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu\alpha}^\alpha = \delta \{ \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \}$
 $= \partial_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) - \partial_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) + \delta \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda + \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda$
 $- \delta \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ ③

つまり $\delta \Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ はテンソル量なので、共変微分が作用可能。

④ §2. (2-3-5) [23] より、座標変換 $x^\alpha \rightarrow y^{\bar{\alpha}}$ による接続係数 $C_{\nu\lambda}^\mu$ は
 $C_{\bar{\kappa}\bar{\alpha}}^{\bar{\omega}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar{\alpha}}} \frac{\partial y^{\bar{\omega}}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\bar{\lambda}}} C_{\mu\alpha}^\nu + \frac{\partial y^{\bar{\omega}}}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^{\bar{\alpha}} \partial y^{\bar{\lambda}}}$
 と変換する。2つの接続場 $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu, \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu$ は同じ多様体には付与しては、その差
 $\delta \Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ は
 $\delta \Gamma_{\bar{\kappa}\bar{\alpha}}^{\bar{\omega}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\bar{\alpha}}} \frac{\partial y^{\bar{\omega}}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\bar{\lambda}}} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\nu$ と、テンソルの変換性を示す。

よ. 2. $\nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^k) = \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^k + \Gamma_{\omega\nu}^k \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\omega - \Gamma_{\mu\nu}^\omega \delta \Gamma_{\omega\lambda}^k - \Gamma_{\lambda\nu}^\omega \delta \Gamma_{\mu\omega}^k$ (4)

よ. 3. 4.

$$\begin{aligned} & \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) - \nabla_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \\ &= -\partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\omega\nu}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\omega - \Gamma_{\mu\nu}^\omega \delta \Gamma_{\omega\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\nu}^\omega \delta \Gamma_{\mu\omega}^\alpha \\ & - (\partial_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) + \Gamma_{\omega\alpha}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\omega - \Gamma_{\mu\alpha}^\omega \delta \Gamma_{\omega\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\omega \delta \Gamma_{\mu\omega}^\alpha) \\ &= \delta R_{\mu\nu} \quad (5) \end{aligned}$$

) $\therefore \delta S_2 = \int g^{\mu\nu} [\nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) - \nabla_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)] \sqrt{-g} d^4x$

$$= \int [\nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) - \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)] \sqrt{-g} d^4x \quad (6)$$

2. 2. 2. 任意の n 次元多様体に対して

$$\nabla_\nu U^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} U^\nu) \quad (7)$$

) $\Rightarrow \delta S_2 = \int \{ \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) - \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \} d^4x \quad (8)$

4次元の積分領域 Σ_Ω , Σ_Ω の表面 $\partial \Sigma_\Omega$ に対して, Gauss の定理より

$$\delta S_2 = \int_{\Sigma_\Omega} \{ \dots \} d^4x = \int_{\partial \Sigma_\Omega} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) d\Sigma_\nu - \int_{\partial \Sigma_\Omega} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) d\Sigma_\alpha$$

$d\Sigma_\alpha$: $\partial \Sigma_\Omega$ の面積要素

これらの表面項は $\partial \Sigma_\Omega$ を無限遠へ送り行くと消える

(有限な境界: Gibbons-Hawking-York 項が必要) cf. 白水「アインシュタイン方程式」§4.5 (オーム社)

$$\underline{\delta S_2 = 0} \quad (9)$$

δS_3

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{\S 2. 「Christoffel 記号の便利な公式」})$$

$$\delta S_3 = \int -\frac{R}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (10)$$

∴ 以上より

$$\delta S_H = \int \delta g^{\mu\nu} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right\} \sqrt{-g} d^4x + (\text{表面項}) \quad (11)$$

ii) L_m の作用積分の $g^{\mu\nu}$ に対する変分 ($L_m \sqrt{-g}$ は $g^{\mu\nu}$, $\partial_\alpha g^{\mu\nu}$ の関数)

$$\begin{aligned} \delta \int L_m \sqrt{-g} d^4x &= \int \left[\frac{\partial (L_m \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial (L_m \sqrt{-g})}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right] d^4x \\ &\quad \swarrow \text{部分積分} \\ &= \int \left[\frac{\partial (L_m \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left\{ \frac{\partial (L_m \sqrt{-g})}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \dots \\ &\quad + (\text{表面項}) \quad (12) \end{aligned}$$

物質場の広がりには有限だと、十分大なる積分領域をとりおくと (表面項) = 0

$$\text{よって} \quad T_{\mu\nu} \equiv \frac{2c}{\sqrt{-g}} \left[\partial_\lambda \left\{ \frac{\partial (L_m \sqrt{-g})}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} - \frac{\partial (L_m \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \quad (13)$$

と、いふ 2階対称テンソルを定義する。

$$\delta \int L_m \sqrt{-g} d^4x = - \int \frac{1}{2c} T_{\mu\nu} \cdot \sqrt{-g} d^4x \quad (14)$$

iii) 作用積分全体の $g^{\mu\nu}$ についての変分は

$$\delta S = \int \delta g^{\mu\nu} \left[\frac{c^3}{16\pi G} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - \frac{T_{\mu\nu}}{2c} \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (15)$$

任意の $\delta g^{\mu\nu}$ について S が停留

$$\Rightarrow [\] = 0 \Rightarrow \underline{G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \quad (16)$$

* 全作用 S' の物質場についての変分は、 L_G が物質場依存しないので

$$\delta S' = \delta \int L_m \sqrt{-g} d^4x = 0$$

→ 物質場の Euler-Lagrange 方程式

** 重力場の Lagrangian に R の非線型項を許して拡張

$$\delta S'_H = \delta \int f(R) \cdot \sqrt{-g} d^4x \quad (17)$$

⇒ $f(R)$ - 重力理論 (f of R gravity)

(+) T.P. Sotiriou & V. Faraoni, Rev. Mod. Phys., 82, 451 (2010)

*** 宇宙項を考慮した Hilbert 作用は

$$S_H = \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x \quad (18)$$

§ 6 球対称真空の時空 (Schwarzschild 時空) ... Einstein 方程式の解析解

G=1 . 太陽などの星の外部の時空

(回転しない) , black hole , white hole , worm hole の時空

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM_0}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM_0}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Schwarzschild 計量

- c : 真空中の光速 (c=1 の単位系)
- G : 重力定数 (Newton の万有引力定数)
- M₀ : 質量定数 ⇒ 質量の次元をもつ (星, black hole の質量と解釈)
 - 重力質量

また、次元を確認

$$[G] = [M^{-1} L^3 T^{-2}]$$

また、[M₀] = [M] とすると、

$$\begin{aligned} \left[\frac{2GM_0}{c^2 r}\right] &= [M^{-1} L^3 T^{-2}] \cdot [M] \cdot [T^2 L^{-2}] \cdot [L^{-1}] \\ &= [M^0 L^0 T^0] \rightarrow \text{無次元} \Rightarrow \text{OK} \end{aligned}$$

▷ 簡単化のため次の単位系を導入

$$c = 1 \quad (\text{既出})$$

$$G = 1$$

Geometrized unit
(幾何学化単位系)

$$c = 1 \text{ 単位系では } [t] = [r]$$

「G=1」も加えると

$$\begin{aligned} [r] &= [M] \\ [t] &= [M] \end{aligned}$$

$$\frac{2GM_0}{c^2 r} \xrightarrow{(c=1, G=1)} \frac{2M_0}{r} \quad \text{同じ次元}$$

この単位系で M₀ (= $\frac{GM_0}{c^2}$) は長さの次元をもつ

この長さを 重力半径 (gravitational radius) と呼ぶ

$$r_g = \frac{GM_0}{c^2} \rightarrow M_0$$

↑
(c=1, G=1)

Schwarzschild 計量

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1)$$

(* $M_0 \rightarrow M$ とした)• Schwarzschild 座標 (t, r, θ, φ) Eq.(1) の計量に現れる座標 (t, r, θ, φ) は次の特別な性質をもつ

i) metric 係数が時間に依存しない、

ii) 時間反転について計量が不変 ($t \rightarrow -t$ で不変)iii) (θ, φ) 座標の部分は 2次元球面の metric (半径 $r = \text{一定}$)i), ii) は時空が 静的 (static) であることの定義 (i), ii) が満たす場合は 定常 (stationary))iii) は時空が $(t = \text{一定}, r = \text{一定})$ の范围内で 回転対称性 をもつことを示す。
↓
"球対称"

* もちろん、この同じ時空に全く一般の座標を入れることも可能で、その座標では計量は (1) のようにはならない。

しかし、時空の対称性 そのものは座標変換で失なわれない。⇒ Schwarzschild 座標はこの 対称性を明示 してくる便利な座標

- ・ 時間推進と反転
- ・ 回転

* - * より詳しい時空の対称性の議論は

『Lie 微分』 『Killing ベクトル』 などの概念を導入して行なう

§ 6-27 球対称真空解の導出

6-2-1 時空の対称性による計量の形の制限

(cf) 平坦な Minkowski 時空 \Rightarrow 原点 (ここで $t=0, r=0$) のまわりの球対称

$$ds^2 = \underbrace{-dt^2 + dr^2}_{\theta, \varphi \text{ に依存しない}} + r^2 \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}_{\text{この部分の計量 (2次元球面) は } t, r \text{ に依存しない}} \quad (1)$$

[一般化]

$d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \equiv d\Omega^2$ の依存性をこのまゝに保つて一般化する

座標 (t, r, θ, φ) に対して

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + \chi^2 d\Omega^2 + 2g_{t\theta} dt d\theta + 2g_{t\varphi} dt d\varphi + 2g_{r\theta} dr d\theta + 2g_{r\varphi} dr d\varphi \quad (2)$$

$\chi = \chi(t, r) \geq 0$
とす

(θ, φ の非対角項 = 0)

a) $r = \text{一定}$ の面 $(dr=0)$ 上

$$(2) \Rightarrow ds^2 = g_{tt} dt^2 + \chi^2 d\Omega^2 + 2g_{t\theta} dt d\theta + 2g_{t\varphi} dt d\varphi \quad (3)$$

(3) より $g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = 2g_{t\theta}$ $\frac{\partial}{\partial t}$: t 方向の基底ベクトル

この値が有限ならば、時空に特別な方向性が生じることになる。
 $\frac{\partial}{\partial \theta}$: θ 方向の基底ベクトル

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{ と逆向きのベクトル } \left(-\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \text{ に対して} \\ g\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = -g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \neq 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \text{ 方向と } -\frac{\partial}{\partial \theta} \text{ 方向の世界間隔が異なり長さまで異なる} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow g_{t\theta} = 0 \quad (4)$$

同様に考えて

$$g_{t\varphi} = 0 \quad (5)$$

b) $t = \text{一定}$ の面上 ($dt=0$) で考えると.

4

1a) と同様の議論から.

$$g_{r\theta} = 0 \quad (6)$$

$$g_{r\varphi} = 0 \quad (7)$$

以上 a), b) より.

$$(2) \Rightarrow ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + \chi^2(t, r) d\Omega^2 \quad (8)$$

$$g_{tt} = g_{tt}(t, r), \quad g_{tr} = g_{tr}(t, r), \quad g_{rr} = g_{rr}(t, r)$$

(θ, φ に依存しない)

2次元 Ω に沿って

$$\left. \begin{array}{l} \chi(t, r) \equiv R \\ t = T \end{array} \right\} \quad (9)$$

と座標変換を行なうと (8) は.

$$ds^2 = g_{TT}(T, R) dT^2 + 2g_{TR}(T, R) dT dR + g_{RR}(T, R) dR^2 + R^2 d\Omega^2 \quad (10)$$

と書ける

$$\left(\begin{array}{l} g_{TT} = \frac{\partial t}{\partial T} \frac{\partial t}{\partial T} g_{tt} + \frac{\partial t}{\partial T} \frac{\partial r}{\partial R} g_{tr} + \frac{\partial r}{\partial T} \frac{\partial t}{\partial T} g_{tr} + \frac{\partial r}{\partial T} \frac{\partial r}{\partial R} g_{rr} \\ \text{など} \end{array} \right)$$

一方、 $(g_{TT} dT + g_{TR} dR) \cdot A(T, R) \equiv d\tau$ ^{の完全微分} (11) ; $\tau = \tau(T, R)$

と積分因子 A が存在する。(独立変数は2つなので)

すると.

$$\begin{aligned} (10) \Rightarrow ds^2 &= (g_{TT} dT + 2g_{TR} dR) dT + g_{RR} dR^2 + R^2 d\Omega^2 \\ &= \frac{1}{g_{TT}} \left(\frac{d\tau}{A} + g_{TR} dR \right) \left(\frac{d\tau}{A} - g_{TR} dR \right) + g_{RR} dR^2 + R^2 d\Omega^2 \\ &= \frac{1}{A^2 g_{TT}} d\tau^2 + \left(g_{RR} - \frac{(g_{TR})^2}{g_{TT}} \right) dR^2 + R^2 d\Omega^2 \quad (12) \end{aligned}$$

と対角化できる

T の代わりに τ を座標とすれば,

5

$$ds^2 = g_{\tau\tau}(\tau, R) d\tau^2 + g_{RR}(\tau, R) dR^2 + R^2 d\Omega^2 \quad (13)$$

が 球対称時空 (※ 真空でなくとも可) の計量の一般形となる。

$\tau = \text{一定}$ かつ $R = \text{一定}$ のとき,

$$ds^2 = R^2 d\Omega^2 \Rightarrow R \text{ 座標は、この二次元面 (球面) の面積が } 4\pi R^2 \text{ となるように定義されている。}$$

以下では $\tau \rightarrow t, R \rightarrow r$ と書く。

6-2-2 球対称真空解

) (13) $\Rightarrow ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (14)$

$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \phi(t, r) \\ \lambda = \lambda(t, r) \end{array} \right.$
ここで、時間的 \wedge 方向の ϕ は負
空間的 \wedge 方向の λ は正
となるように符号をとる。

真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) での Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = 8\pi (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) = 0 \quad (15)$$

(14) の時空の Ricci テンソルを計算すると、($f' \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t}$)

) $R_{tt} = e^{2\phi-2\lambda} [\phi'' + \phi'(\phi' - \lambda' + \frac{2}{r})] - e^{\phi-\lambda} (\dot{\lambda} e^{\lambda-\phi}) \quad (16)$

$R_{tr} = -\frac{2e^\lambda}{r} (\dot{e}^{-\lambda}) \quad (17)$

$R_{rr} = -\phi'' - \phi'(\phi' - \lambda') + \frac{2\lambda'}{r} + e^{-\phi+\lambda} (\dot{\lambda} e^{\lambda-\phi}) \quad (18)$

$R_{\theta\theta} = -r\phi' e^{-2\lambda} + r\lambda' e^{-2\lambda} + 1 - e^{-2\lambda} \quad (19)$

$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} \cdot \sin^2\theta \quad (20)$

$R_{t\theta} = 0, R_{t\varphi} = 0, R_{r\theta} = 0, R_{r\varphi} = 0, R_{\theta\varphi} = 0 \quad (21)$

※ このような対称性のある時空で曲率を計算する場合。

“Cartan の構造方程式” を使えば比較的簡単

(17) = 0 かつ

$$(e^{-\lambda})' = 0 \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda(r) \quad (22)$$

すると、(16), (18) の時間微分の項は 0 になる。

(16) = 0 & (18) = 0

$$\Rightarrow \phi' + \lambda' = 0 \quad (23)$$

(23) より、(19) = 0 は、

$$2r e^{-2\lambda} \frac{d\lambda}{dr} + 1 - e^{-2\lambda} = 0 \quad (24)$$

(24) は解析的に解ける。

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{c}{r}} \quad (c: \text{積分定数}) \quad (25)$$

一方、(23) より

$$\phi' = -\lambda(r) + K(t) \quad (K(t): t \text{ の任意関数}) \quad (26)$$

よって、

$$e^{2\phi} = e^{-2\lambda} e^{2K} = \left(1 - \frac{c}{r}\right) e^{2K} \quad (27)$$

(14) に代入して、 $\tilde{t} \equiv \int e^{2K(t)} dt$ と (2) 時間座標を定義しなおすと、

$$(14): ds^2 = -\left(1 - \frac{c}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{c}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (28)$$

原点から遠方では

$$g_{tt} \rightarrow -1 - 2\bar{\Phi}_N \quad (r \rightarrow \infty)$$

$\bar{\Phi}_N$: Newton の重力ポテンシャル

$$\bar{\Phi}_N = -\frac{M}{r} \text{ かつ } \underline{c = 2M}$$

(§5. p.47)
 g_{tt} の -1 の部分の ϵ は $-2\bar{\Phi}_N$ になる。

$$\therefore (28) \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (29)$$

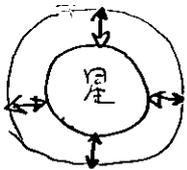
Schwarzschild 解

($\tilde{t} \rightarrow t$ と書き直した)

当初中, λ には時間依存性を仮定し追加, 結局 (29) は
 時間に依存しなくなる, 在.

⇒ [Birkhoff の定理]

Einstein 方程式の球対称真空解は静的である.



球対称性を保ちながら振動する星の外部へ時空は (29)
 の形に書ける
 (真空) ↓

- ・ 外部は時間的に変動しない,
- ・ 球対称な運動からは重力波は放射されない

6-3 Schwarzschild 時空の測地線

Schwarzschild 時空の性質を調べるため、自由質点の運動を考える。
(測地線)

(A) 運動の恒量

問2 Eq. (1) は計量から t, φ の座標によることを示す。

$$\partial_t g_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0$$

⇒ 質点の 4元運動量 p^μ により

$$p_t = g_{t\mu} p^\mu, \quad p_\varphi = g_{\varphi\mu} p^\mu$$

がそれぞれ運動の恒量となる。

質量 m とし、4元運動量のノルムは

$$p^\mu p_\mu = -m^2$$

$$\rightarrow -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(p^t)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}(p^r)^2 + r^2(p^\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (p^\varphi)^2 = -m^2 \quad (2)$$

§3 p. 35, §3-9 参照

$$E \equiv -p_t = +\left(1 - \frac{2M}{r}\right) p^t, \quad L \equiv p_\varphi = r^2 \sin^2\theta p^\varphi$$

) はそれぞれ質点の運動の恒量 (エネルギーと角運動量)

(B) $m \neq 0$

・時空の球対称性から、最初 $\theta = \frac{\pi}{2}$ とすると以降 $\theta = \frac{\pi}{2}$ で運動する。

$$\rightarrow \frac{d\theta}{d\tau} = 0 \quad \left(\frac{dr}{d\tau}, \frac{d\varphi}{d\tau} \text{ は non-zero} \right) \text{ とし、}$$

(2) より

$$-\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{m^2 \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{L^2}{r^2} = -m^2 \quad (3)$$

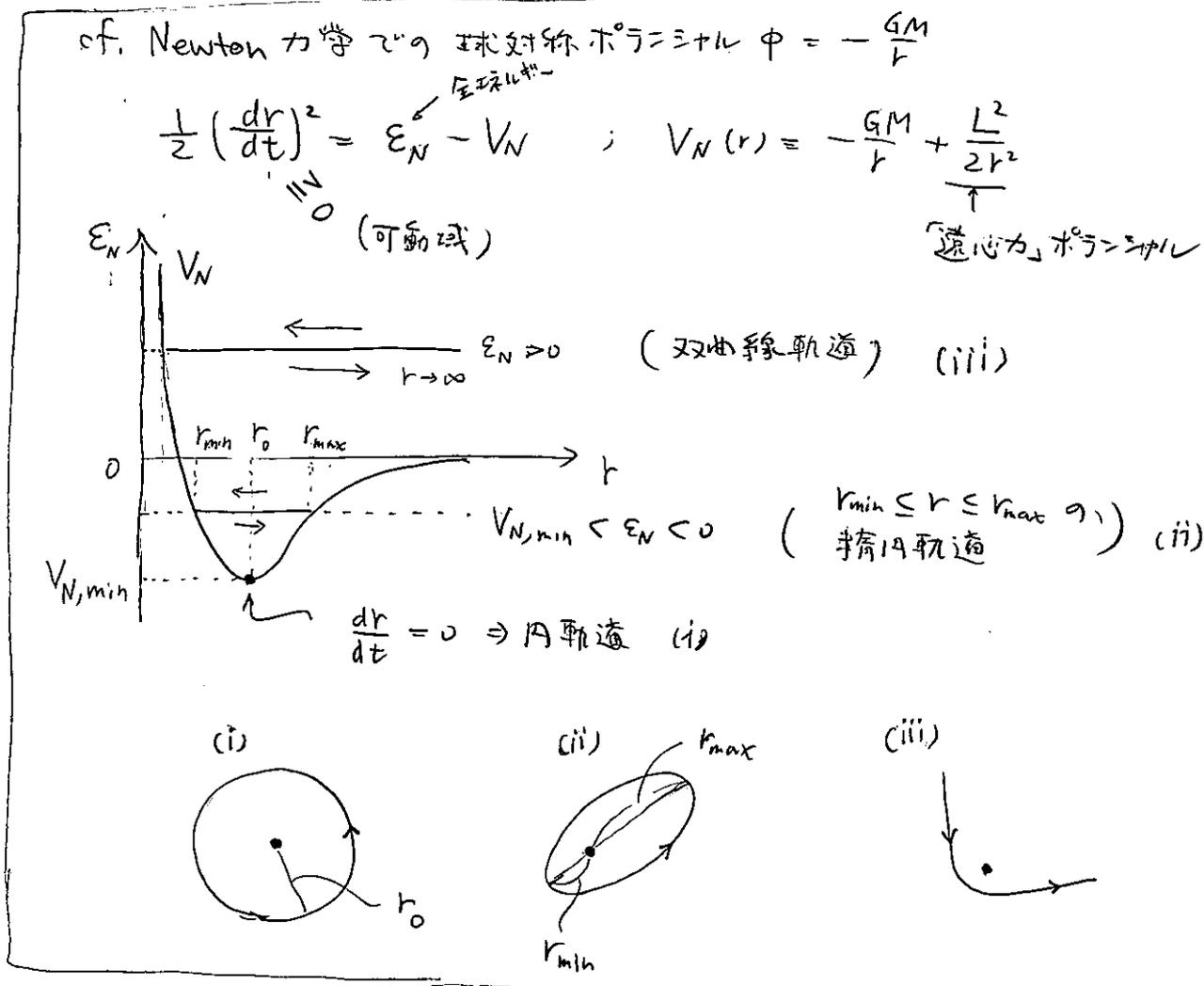
$\frac{E}{m} \equiv \tilde{E}, \quad \frac{L}{m} \equiv \tilde{L}$ とし、単位質量あたりのエネルギー、角運動量を定義

↑
比角運動量
(specific angular momentum)

$$\tilde{E}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (4)$$

$\frac{dr}{dt}$: 質点の動径方向の速度 (を固有時で測ったもの)

$$(4) \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}_{\text{運動エネルギー}} = \tilde{E}^2 - \underbrace{V(r)}_{\text{ポテンシャル}} \quad V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (5)$$



(5) の運動を同様に調べる

ポテンシャル V の振舞

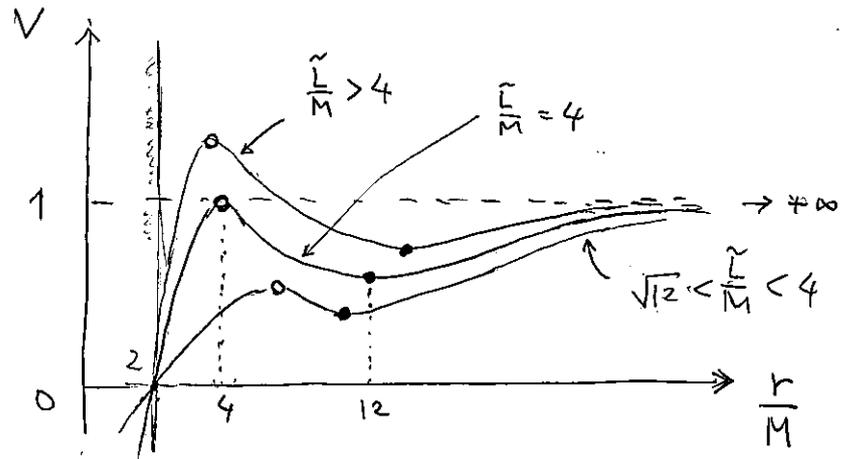
$$\frac{dV}{dr} = \frac{2}{r^3} (Mr^2 - \tilde{L}^2 r + 3M\tilde{L}^2)$$

() の中の判別式 = $\tilde{L}^2 (\tilde{L}^2 - 12M^2)$

(a) $\tilde{L}^2 > 12M^2$: $\frac{dV}{dr} = 0$ は 2 実根をもつ $\left(\frac{r}{M} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tilde{L}}{M} \right)^2 \pm \left(\frac{\tilde{L}}{M} \right) \sqrt{\left(\frac{\tilde{L}}{M} \right)^2 - 12} \right] \right)$

$r \rightarrow 0$ 則 $V \rightarrow -\infty$; $r \rightarrow +\infty$ 則 $V \rightarrow 1$

$r = 2M$ 則 $V = 0$



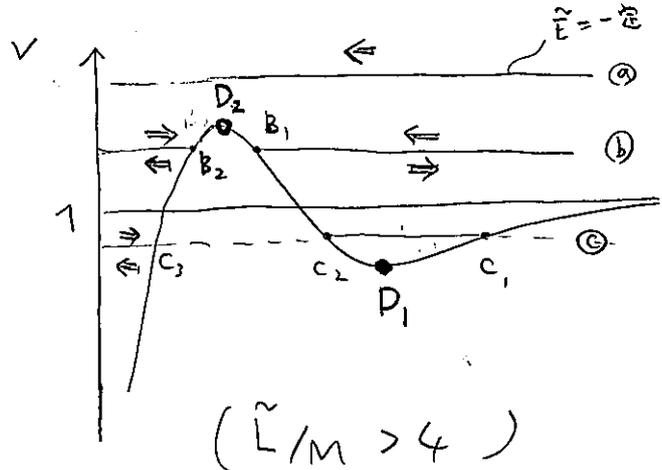
(運動の様子)

$r \rightarrow \infty$ 則 $V \rightarrow 1$, $(\frac{dr}{dt})^2 \geq 0 \Rightarrow \tilde{E} \geq 1$ ($\frac{\tilde{E}}{M} \geq 1$: 物体の力学的全エネルギーの下限は $E = m$)

$\Rightarrow r \rightarrow \infty$ に物体が到達するには: $\tilde{E} \geq 1$

但し: $\tilde{E} \geq 1$ であっても $r \rightarrow \infty$ に到達できない場合がある ($\tilde{L}/M \geq 4$ での $\frac{dr}{dt} < 0$ の運動)

$\tilde{E} < 1$ なら、物体は有限の r に束縛される。

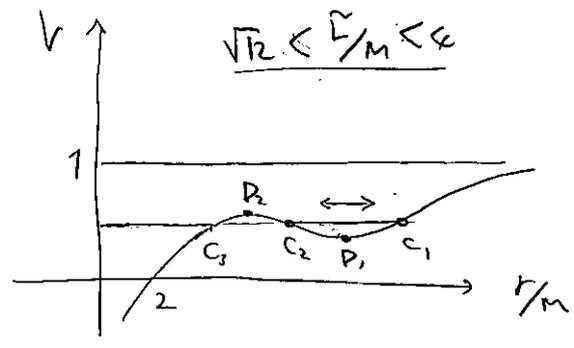


($\tilde{L}/M > 4$)

D_1 : 安定な内軌道
 D_2 : 不安定な内軌道

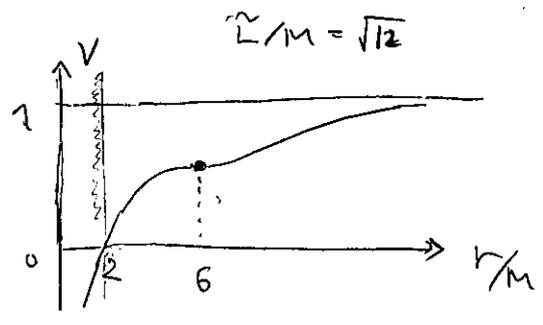
- (a) ポテンシャルに衝突しなから落下しはじめる場合
- (b) (外側) $r \rightarrow \infty \Rightarrow B_1 \Rightarrow r \rightarrow \infty$ Newton の「双曲軌道」
- (内側) B_2 則は有限に戻ってくる
- (c) $C_1 \rightleftharpoons C_2$ Newton の「楕円の」

$\sqrt{12} < \frac{\tilde{L}}{M} < 4$ のときは束縛軌道のみ存在



② $\tilde{L}^2 = 12M^2$: $\frac{dV}{dr} = 0$ は重根をもつ

$\frac{dV}{dr} = 0$ の点 $r = 6M$ は V の変曲点



$r = 6M$ の点では $\frac{dV}{dr} = 0$ なので、円軌道を描く。

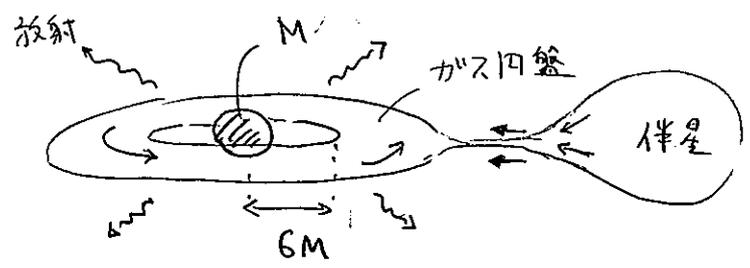
しかし、 $\frac{d^2V}{dr^2} = 0$ でもあるので中立安定である

$r = 6M$: last stable circular orbit (最終安定円軌道)

innermost stable circular orbit (ISCO)

※ $\tilde{L}^2 > 12M^2$ のときの安定円軌道は $r > 6M$

① 重力源天体の周りを回る伴星、ガスなどは $r < 6M$ の円軌道を描けない



ブラックホールを含む視線連星系

③ $\tilde{L}^2 < 12M^2$

安定な束縛軌道は存在しない。

(C) $m=0$ のとき (光子の軌道)

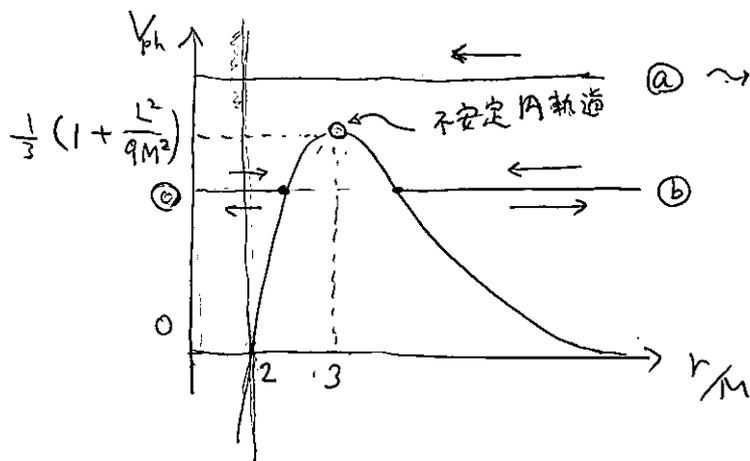
(B) の (式(3)) で $m \frac{dx^\mu}{dt} \rightarrow k^\mu$ と置き換えて $m \rightarrow 0$ とすると、
光子のよる null 的粒子の記述から得る (k^μ : 光子の4元運動量)

$$-(k^r)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \equiv E^2 - V_{ph}(r)$$

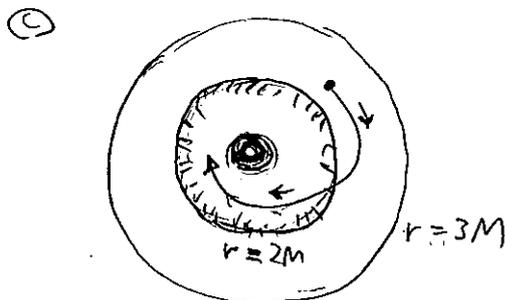
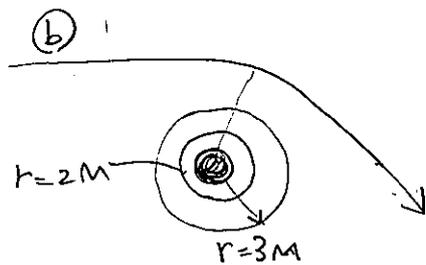
$$\left(V_{ph}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \right)$$

• $V_{ph}(r)$ の振舞

- $r \rightarrow \infty$ とき $V_{ph} \rightarrow 0$
- $r = 2M$ とき $V_{ph} = 0$
- $\frac{dV_{ph}}{dr} = -\frac{2L^2}{r^3} \left(1 - \frac{3M}{r}\right)$



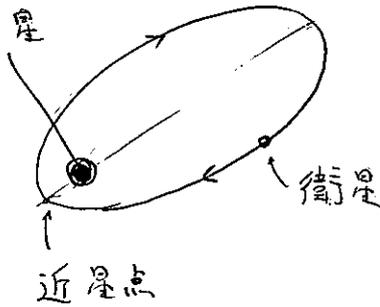
(a) \rightarrow ホライズンに衝突しないので、 $r \rightarrow \infty$ から落ちてくると返ってくる!!



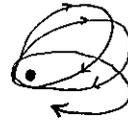
• $r = 3M$: photon orbit

(D) m の内軌道で与えられた運動

Newton 力学では $\phi = -\frac{GM}{r}$ の下での束縛運動は楕円軌道となる



* 重力ポテンシャルが " $\frac{1}{r}$ " 以外の項とすると楕円軌道にならない



$$\phi = -\frac{GM}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \dots$$

中心星が自転など変形している場合、または他の惑星の擾乱

* Newton 力学での略解は p.14 参照

Schwarzschild 時空ではどうか?

軌道 $r = r(\varphi)$ を調べる。

$$\text{式 (4)} \quad \tilde{E}^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

(比) 角運動量の定義: $\tilde{L} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$ (6)

$$\text{よ} \quad \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

$$\therefore \tilde{E}^2 = \left(\frac{\tilde{L}}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{\tilde{L}^2} r^4 - \frac{1}{\tilde{L}^2} r^4 + \frac{2M}{\tilde{L}^2} r^3 - r^2 + 2Mr \quad (7)$$

$$= 2u \quad u \equiv \frac{\tilde{L}^2}{Mr} \quad \text{と等置すると} \quad (r = r(u))$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} = -\frac{\tilde{L}^2}{M} \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}$$

これを (7) に代入して整理

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \underbrace{\frac{\tilde{E}^2 \tilde{L}^2}{M^2} - \frac{\tilde{L}^2}{M^2}}_{\text{定数項}} + 2u - u^2 + \frac{2M^2}{\tilde{L}^2} u^3 \quad (8)$$

定数項

1 Newton 重力下の点状重力源についての、ニュートン粒子の運動の解析解

基礎方程式は

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{r^2} \quad (1)$$

$$r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (2)$$

をとる。

2番目の方程式に r を掛けると

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \quad (3)$$

となるので、括弧の中身は定数となる。この定数を ℓ とおく。

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \ell \quad (4)$$

この定数は「単位質量あたりの角運動量」(比角運動量) になっている。

$$\frac{d\varphi}{dt} = \ell u^2 \quad (5)$$

ここで、関数 u を $u = \frac{1}{r}$ と定義すると

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{dt}{d\varphi} \cdot \frac{du}{dt} = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^{-1} \cdot \frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{dt} = \frac{1}{\ell u^2} \left(-\frac{\frac{du}{dt}}{r^2} \right) = \frac{1}{\ell u^2} \left(-u^2 \frac{dr}{dt} \right) = -\frac{\frac{dr}{dt}}{\ell} \quad (6)$$

より、

$$\frac{dr}{dt} = -\ell \frac{du}{d\varphi} \quad (7)$$

これをもう一度 t で微分して

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(-\ell \frac{du}{d\varphi} \right) = \ell u^2 \cdot (-\ell) \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -\ell^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \quad (8)$$

よって、動径方向の運動方程式を書き直すと

$$-\ell^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{1}{u} (\ell u^2)^2 = -u^2 \quad (9)$$

これを整理して

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -u + \frac{GM}{\ell^2} \quad (10)$$

となる。式 (10) は $Y = u - \frac{GM}{\ell^2}$ という関数を導入すると

$$\frac{d^2 Y}{d\varphi^2} = -Y \quad (11)$$

という簡単な方程式になる。これは単振動の微分方程式であるので、その一般解は

$$Y = A \cos(\varphi + \alpha) \quad (12)$$

と書ける。ここで A, α は積分定数である。このとき

$$u = \frac{GM}{\ell^2} + A \cos(\varphi + \alpha) \quad (13)$$

である。この式を r についての式に直す前に積分定数を変換して $e = \frac{\ell^2}{GM} A$ とする定数 e を A の代わりに導入しておく。このとき

$$r(\varphi) = \frac{\ell^2}{GM} \frac{1}{1 + e \cos(\varphi + \alpha)} \quad (14)$$

が、動径 r を φ の関数と見たときの軌道運動の解である。

これは原点を焦点とする離心率 e の二次曲線 ($0 \leq e < 1$ のときは楕円 ($e = 1$ のときは円軌道)、 $e = 1$ のとき放物線、 $e > 1$ のとき双曲線となる) である。ニュートンの重力で質点を直方座とする場合のニュートン粒子の運動は重力源の質点を焦点に置いたときの二次曲線を描くことが分かった。

(8) φ で微分

$$2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} = 2 \frac{du}{d\varphi} - 2u \frac{du}{d\varphi} + \frac{6M^2}{L^2} u^2 \frac{du}{d\varphi}$$

$\frac{du}{d\varphi} \neq 0$ のとき (A) 軌道の場合を除く; $\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \neq 0$)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 1 - u + \frac{3M^2}{L^2} u^2 \quad (9)$$

(*) Newton 力学で対応する式は

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 1 - u$$

→ 単振動

いま、式(9)の第3項が第2項に比べて十分小さい場合を考える。

$$\left(\begin{aligned} & (*) \quad \frac{3M^2}{L^2} u^2 \ll u \rightarrow \frac{3M^2}{L^2} u \ll 1 \\ & \therefore \frac{3M^2}{L^2} \frac{L^2}{Mh} \ll 1 \rightarrow \underline{3M \ll h} \end{aligned} \right)$$

$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 1 - u$ の解を u_0 とし、第3項が加わったときの運動は

u_0 がずれるかのようにして $u = u_0 + u_1$ と書く ($|u_1| \ll |u_0|$)

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} (u_0 + u_1) = 1 \oplus (u_0 + u_1) + \frac{3M^2}{L^2} (u_0 + u_1)^2$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2} u_1 = 1 - u_1 + \frac{3M^2}{L^2} (u_0^2 + 2u_0 u_1 + u_1^2)$$

第3項の最低次をとると

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u_1 = -u_1 + \frac{3M^2}{L^2} u_0^2 \quad (10)$$

u_0 は φ の位相を適切にとると、

$$u_0 = 1 + e \cos \varphi \quad (\varphi = 0 \text{ を近接点})$$

e : Newton 力学での離心率 ($0 < e < 1$)

これを(10)に代入

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u_1 = -u_1 + \frac{3M^2}{L^2} (1 + e \cos \varphi)^2 \quad (11)$$

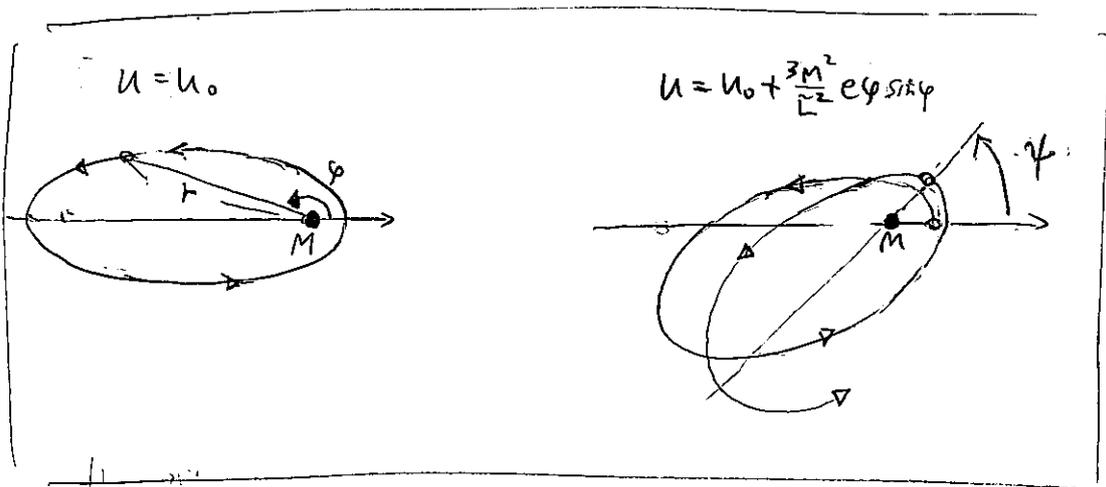
(11) の解は

$$u_1 = \frac{3M^2}{L^2} \left(\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + e\psi \sin\psi - \frac{e^2}{6} \cos 2\psi \right) \quad (12)$$

(12) の第1項は定数, 第3項は ψ が $0 \rightarrow \pi$ に変化すれば元に戻る. 対して, 第2項は 永年の変化の項 である.

いま, この項により物体の軌道が長期間にわたって変化することがある.

$$\bar{u} \equiv u_0 + \frac{3M^2}{L^2} e\psi \sin\psi \quad (13)$$



(13) の第2項により $u_0 \rightarrow \bar{u} = 1 + e \cos[(1-\epsilon)\psi]$ と仮定すると. $(1 + e \cos\psi)$ ($\epsilon \ll 1$)

$$\bar{u} = 1 + e \cos\psi + \frac{d}{d\epsilon} [e \cos(1-\epsilon)\psi] \Big|_{\epsilon=0} \times \epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$= 1 + e \cos\psi + \epsilon e \psi \sin\psi + O(\epsilon^2) \quad (14)$$

(14) と (13) から.

$$\epsilon = \frac{3M^2}{L^2} \quad (15)$$

すなわち, $\psi \in [0, 2\pi]$ のとき $(1-\epsilon)\psi \in [0, 2\pi(1-\epsilon)]$

\bar{u} が一周変化する (物体が近星点から次の近星点まで動く)

には, $2\pi\epsilon \equiv \psi$ だけ余計に運動する必要があるので

$$\psi = \frac{6\pi M^2}{L^2} \quad (\text{近星点移動}) \quad (16)$$

(16) を SI 単位系に展すと

$$\psi = \frac{6\pi \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 c^2}{a^2} = \frac{6\pi GM^2}{c^2 a^2}$$

ℓ : 比角運動量

Newton 力学での軌道では

$$\ell^2 = GMa(1-e^2)$$

a : 軌道長半径

である。重力が弱い場合これを使すと

$$\psi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}$$

) • 水星の近日点移動における一般相対論効果

$$M = M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$a = 5.79 \times 10^{10} \text{ m}$$

$$e = 0.2056$$

$$\rightarrow \psi = 5.0 \times 10^{-7} \text{ rad} \quad (\text{一公転あたり; 水星の公転周期} = 88 \text{ 日})$$

$$\rightarrow \psi = 43'' / \text{century}$$

) • 連星ハルカ - PSR 1513 + 16

$$M \sim 1.4 M_{\odot}, \quad R \sim 10 \text{ km} \quad \text{中性子星連星}$$

$$a = 2 \times 10^9 \text{ m}, \quad e = 0.6$$

$$\psi = 4.2 / \text{yr}$$

(E) "重力レンズ"

§3 の p. 41 で見た、重力場中の光線の湾曲を詳しく調べる。

(c) で見たように、null 的粒子は

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \\ r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = L \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (E: \text{エネルギー} - (\text{保存量})) \\ \lambda: \text{affine パラメータ} \end{array}$$

を満たす軌道を運動する。

) (D) での議論と同様に $u \equiv \frac{L^2}{Mr}$ を導入すると

(9) 式に対応して

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -u + \frac{3M^2}{L^2} u^2 \quad (17)$$

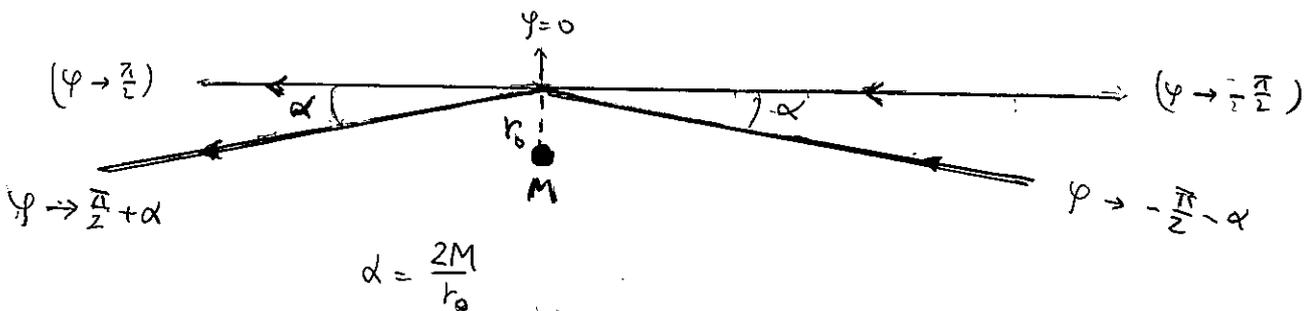
が得られる。(17) の右辺が 2 項が無くなる場合は平坦な時空における光の運動を表すことに注意。

(平坦な場合)

$\frac{r_0}{r} = \cos \varphi \rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{r_0}{r} \right) = -\cos \varphi = -\left(\frac{r_0}{r} \right)$

(r_0 : impact parameter) $r_0/r \propto u$

(17) の右辺が 2 項が小さいと見なせる場合 ($r_0 \gg M$) を考える。



$$(17) \Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{L^2}{Mr} \right) = -\frac{L^2}{M} \cdot \frac{1}{r^3} + \frac{3M^2}{L^2} \left(\frac{L^2}{M} \frac{1}{r} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{r_0}{r} \right) = -\left(\frac{r_0}{r} \right) + \frac{3M}{r_0} \cdot \left(\frac{r_0}{r} \right)$$

右辺第2項が無視しこの解 $\frac{r_0}{r} = \cos\varphi$ を右辺第2項に代入して
 近似解を求める (逐次近似法)
 (下)

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{r_0}{r} \right) = -\frac{r_0}{r} + \frac{3M}{r_0} \cdot \cos^2\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{r_0}{r} = \underbrace{\cos\varphi}_{\substack{\text{近似の} \\ 0\text{次}}} + \frac{2M}{r_0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2\varphi \right)$$

入射方向で $r \rightarrow \infty$ とすると $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$ より $|\cos\varphi| \ll 1 \rightarrow \cos^2\varphi$ は無視

$$\rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{2M}{r_0} = 0$$

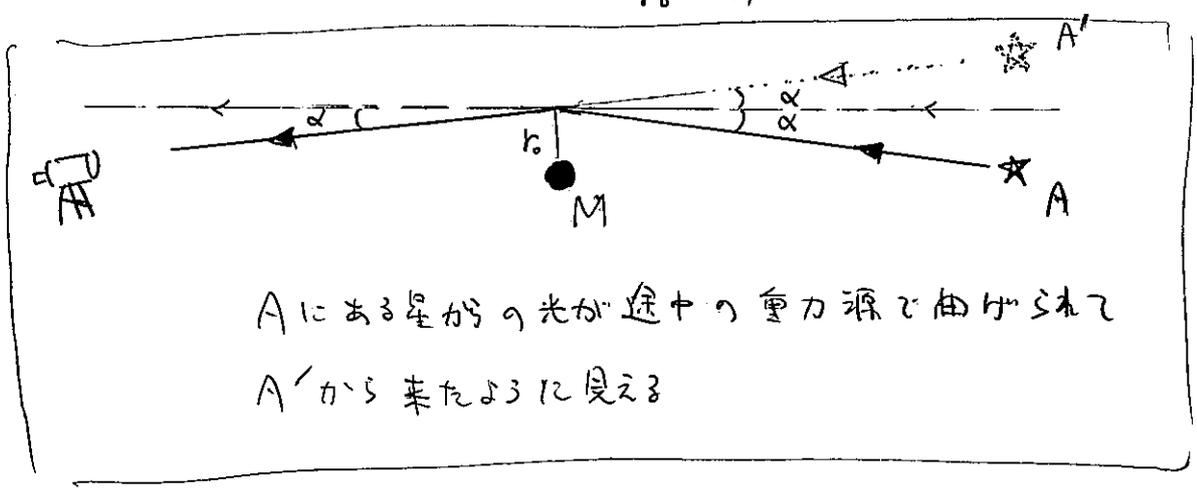
$$\rightarrow -\sin\alpha + \frac{2M}{r_0} = 0 \xrightarrow{\alpha \ll 1} \alpha \approx \frac{2M}{r_0} //$$

遠くから来る光でも同様

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{2M}{r_0} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{2M}{r_0}$$

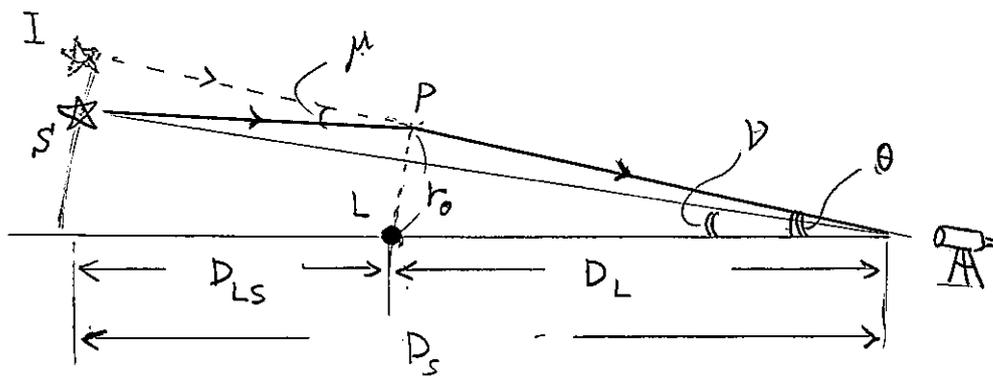
光の経路の湾曲は

$$2\alpha = \frac{4M}{r_0} //$$



Aにある星からの光が途中の重力源で曲がって
 A'から来たように見える

① レンズ方程式



L: 重力レンズ源

S: 遠方の天体

I: 重力レンズによる S の像

レンズ方程式

$$\theta \cdot D_S = \nu D_S + \mu D_{LS}$$

$$\mu = \frac{4M}{r_0} \text{ などのため}$$

$$\theta = \nu + \frac{4M D_{LS}}{r_0 \cdot D_S}$$

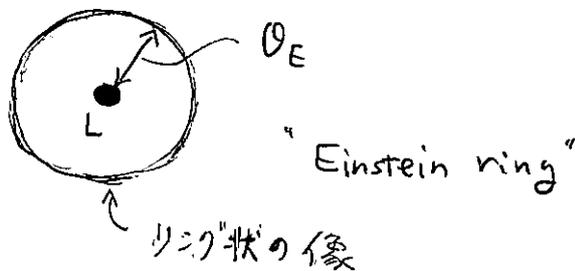
$\theta \ll 1, \nu \ll 1$ のとき $r_0 \approx \theta \cdot D_L$

$$\therefore \theta = \nu + \frac{\theta_E^2}{\theta} \quad ; \quad \theta_E^2 \equiv 4M \cdot \frac{D_{SL}}{D_S \cdot D_L}$$

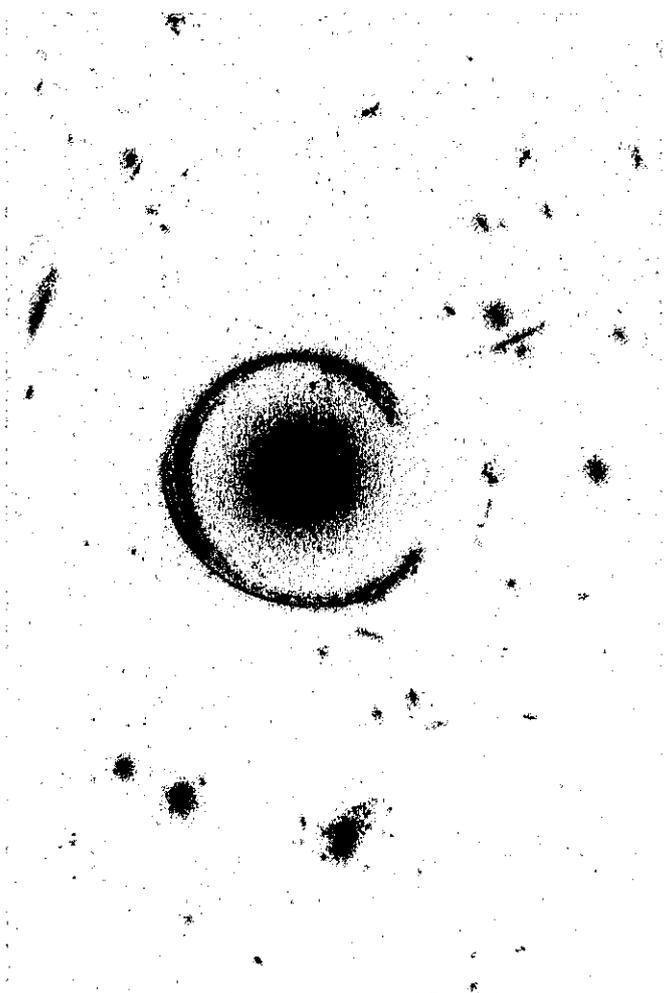
(Einstein 角)

特に $\nu = 0$ とすると (L と S が同一の視線方向)

$$\theta = \theta_E$$

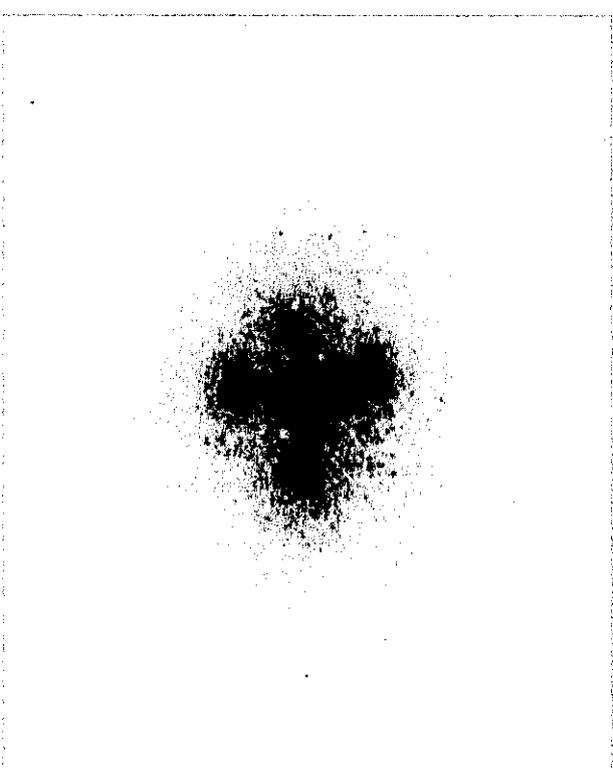


Hubble Space Telescopeによる重力レンズ観測の例



Einstein ring "Horseshoe"

Einstein cross



6-7 事象の地平面 (event horizon)

(1) の計量は $r \rightarrow 2M$ で特異的 (singular) に振舞う

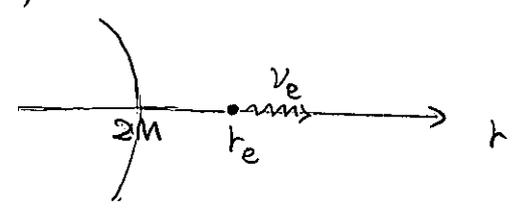
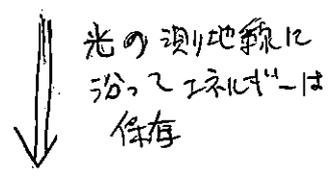
$$\textcircled{1} g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \rightarrow +\infty \quad (r \rightarrow 2M+0)$$

座標基底ベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$ のノルム

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = g_{rr} \rightarrow +\infty \quad ?$$

$$\textcircled{2} g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \rightarrow -0 \quad (r \rightarrow 2M+0)$$

$r=r_e$ の点に静止した光源からの光 (振動数 ν_e)



$$-g_{tt}(r_e) \cdot h\nu_e = -g_{tt}(r \rightarrow +\infty) \cdot h\nu_\infty$$

↑
(無限遠で静止する観測者)

$$\nu_\infty = \left(1 - \frac{2M}{r_e}\right) \nu_e$$

$r_e \rightarrow 2M$ とすると $\nu_\infty \rightarrow 0$ (無限大の赤方偏移)
 or 光は到達しない

③ $r < 2M$ で

$$g_{tt} > 0, \quad g_{rr} < 0$$

⇒ 時間的ベクトル ($\nu_\mu \nu^\mu < 0$)
 空間的ベクトル ($\nu_\mu \nu^\mu > 0$)

か入れ換わる?

(ex.) $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, $\Rightarrow r > 2M$ $u^\mu u_\mu = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) < 0$ timelike

$r < 2M$ $u^\mu u_\mu > 0$ space like

おと. $r=2M$ の物理は破綻しているのか?

⇒ NO!

○ Schwarzschild 座標は $r \leq 2M$ の時空領域を記述するのに不適当なわけではない (cf. 地球表面の Mercator 図法は両極を正しく表現できない)

この後に見るように $r \leq 2M$ の領域を記述できる適切な座標が存在する.

○ 「曲率」は $r=2M$ で発散しない
→ 時空の曲がり方は $r=2M$ で特異的でない

ex.) Schwarzschild 座標で、動径方向の時間的測地線を考える.

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau} = 0, \frac{d\varphi}{d\tau} = 0\right)$$

$$-1 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \quad (18)$$

$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \tilde{E} \rightarrow (r \rightarrow \infty \text{ かつ } \frac{dr}{d\tau} = 0 \text{ で出発した時}) \rightarrow \tilde{E} = 1 \text{ (保存)}$

$$\therefore \frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (19)$$

$$-\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \quad \leftarrow \left(\frac{d}{dt} \text{ であることに注意}\right)$$

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2M}{r}} \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

⊙ これを「落下」と読む。

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2M}{r}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$\rightarrow \frac{t}{2M} = C - \frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{\frac{r}{2M}} + \ln \frac{\sqrt{\frac{r}{2M} + 1}}{\sqrt{\frac{r}{2M} - 1}}$$

$r \rightarrow 2M$ のとき、右辺の各項が支配的.

$$\Rightarrow \frac{t}{2M} \propto -\ln\left(\sqrt{\frac{r}{2M} - 1}\right) \rightarrow r - 2M \propto \exp\left(-\frac{t}{2M}\right) \quad (20)$$

(20) 式は、座標時間 $t \rightarrow \infty$ とは $r - 2M \rightarrow +0$ となることを示す。

\Rightarrow 自由落下する粒子は $r = 2M$ 近傍で停止する?

(か) 粒子の固有時間で運動を見ると。

(18) & (19)

$$\Rightarrow -1 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$$

$$\therefore \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{3}{2}} = C - \frac{3}{2} \left(\frac{\tau}{2M}\right)$$

有限の τ で $r \rightarrow 0$ ($< 2M$) となる

座標時間 t は $r \leq 2M$ での粒子の運動を調べるのに適さない

§4-1 Kruskal - Szekeres 座標

$r \leq 2M$ の領域を調べるのに都合の良い座標を導入

(Schwarzschild: (t, r, θ, φ))

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

(Kruskal - Szekeres: (T, R, θ, φ)) * T, R : 新座標系の時間, 動径座標

$$ds^2 = -\frac{32M^2}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (dT^2 - dR^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (21)$$

$$\equiv 2r^2 r = r(T, R)$$

座標変換

$$R = \begin{cases} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \cosh \frac{t}{4M} & (r \geq 2M) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \sinh \frac{t}{4M} & (r < 2M) \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \sinh \frac{t}{4M} & (r \geq 2M) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \cosh \frac{t}{4M} & (r < 2M) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

* check

• $r \geq 2M$ のとき

$$\left\{ \begin{array}{l} R^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}} \quad (23) \\ T/R = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (24) \end{array} \right.$$

$$(23): \quad 2R dR - 2T dT = \frac{r}{4M^2} e^{\frac{r}{2M}} dr$$

$$\therefore dr = \frac{8M^2}{r} e^{-\frac{r}{4M}} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) dR - \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) dT\right) \quad (25)$$

$$(24): \quad \frac{1}{R} dT - \frac{T}{R^2} dR = \frac{1}{4M} \frac{dt}{\cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right)} \quad \leftarrow (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\therefore dt = 4M \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \cdot (dT - \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) dR) \quad (26)$$

また

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 = -\frac{\left(\frac{r}{2M} - 1\right)}{\left(\frac{r}{2M}\right)} dt^2 + \frac{\left(\frac{r}{2M}\right)}{\left(\frac{r}{2M} - 1\right)} dr^2$$

$$= -\frac{\left(\frac{r}{2M} - 1\right)}{\left(\frac{r}{2M}\right)} \cdot 16M^2 \cdot \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{-1} e^{-\frac{r}{2M}} \cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right) \cdot (dT - \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) dR)^2$$

$$+ \frac{\left(\frac{r}{2M}\right)}{\left(\frac{r}{2M} - 1\right)} \cdot \frac{64M^4}{r^2} e^{-\frac{r}{2M}} \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \cdot \left(\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) dR - \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) dT\right)^2$$

$$= -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (dT^2 - dR^2) //$$

$$\left(\because \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\right)$$

$r < 2M$ の場合も同様

(2) の計量は $r(T, R) = 2M$ で “特異的” ではなく
 発散は $r \rightarrow 0$ のみ (これが真の時空特異点)

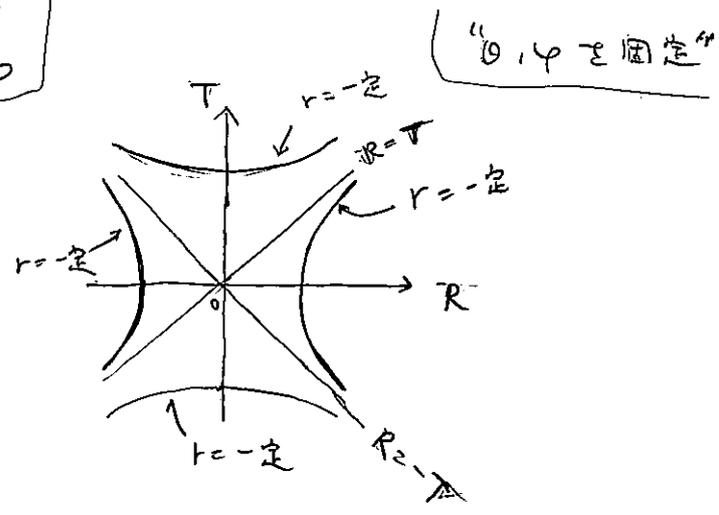
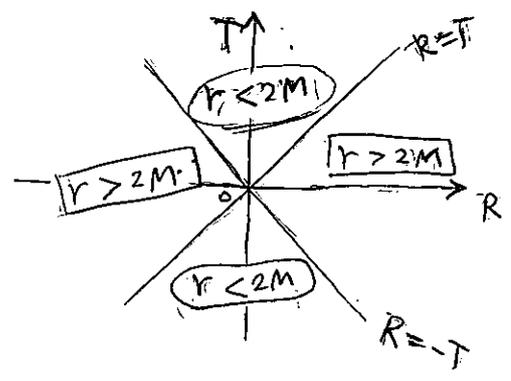
■ Kruskal - Szekeres 座標の特徴

- (θ, φ) は $r > 2M$ は Schwarzschild と同じ
- 符号は $r \geq 2M$ で $(-, +, +, +)$

T: 時間的座標
 R: “動径” 座標

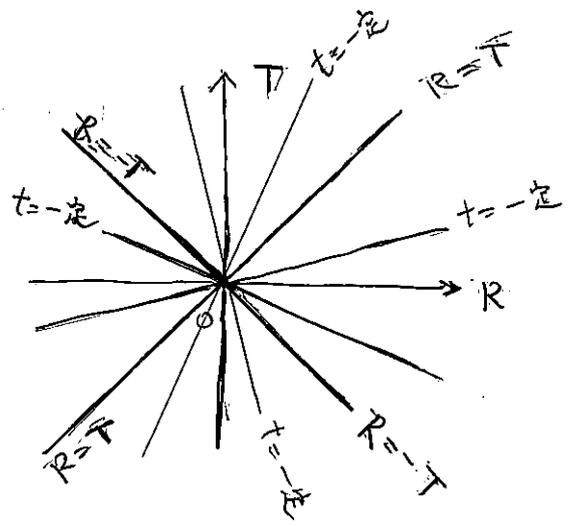
• $t = \text{const.}$ とすると
 $R^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}} = \text{const.}$

$r/2M > 1 \Rightarrow R^2 - T^2 > 0$
 $r/2M < 1 \Rightarrow R^2 - T^2 < 0$



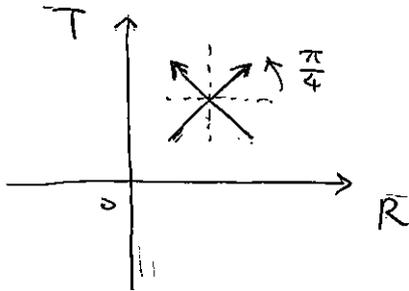
$t = \text{const.}$ とすると
 $T/R = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \text{const.}$
 $\begin{cases} t > 0 \Rightarrow T/R > 0 \\ t < 0 \Rightarrow T/R < 0 \end{cases}$

また
 $-1 \leq \frac{T}{R} \leq 1 \quad (r > 2M)$
 $-1 \leq \frac{R}{T} \leq 1 \quad (t < 2M)$



- 動径方向の null 測地線
($dr, dt = 0$)

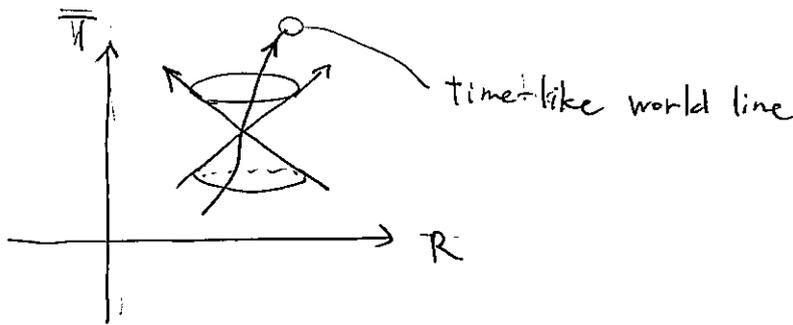
$$ds^2 = 0 \Rightarrow -dT^2 + dR^2 = 0 \quad \therefore dR = \pm dT$$



光円錐は T, R 軸に対して $\frac{\pi}{4}$ の傾きをもつ。

(光の伝播の様子が Minkowski 時空 と同様 ($-dt^2 + dr^2 = 0$))

時間的測地線 (m などの物体の world line) は 光円錐の内側



特に $r = 2M$ は $R = \pm T$ となる null 測地線 に対応

$r = 2M$: null surface (null 面)

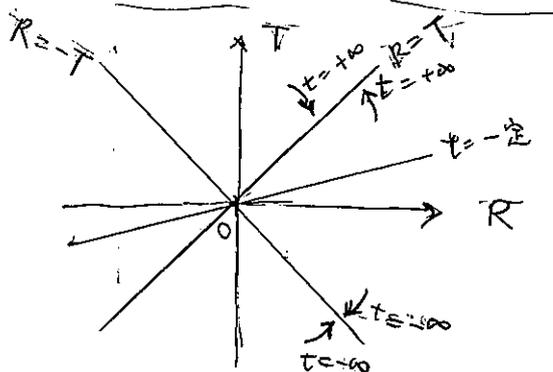
(* $r_0 > 2M$ となる r_0 に対して " $r = r_0$ " は 時間的 world line を描く \Rightarrow "time-like" surface)

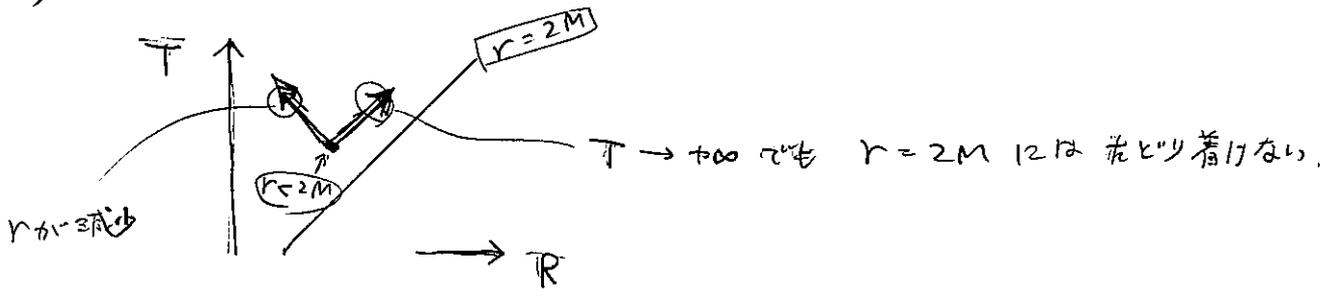
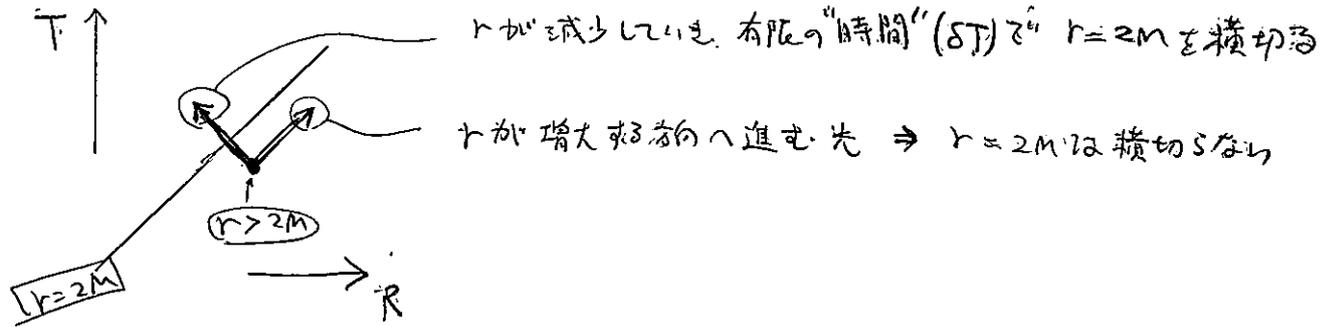
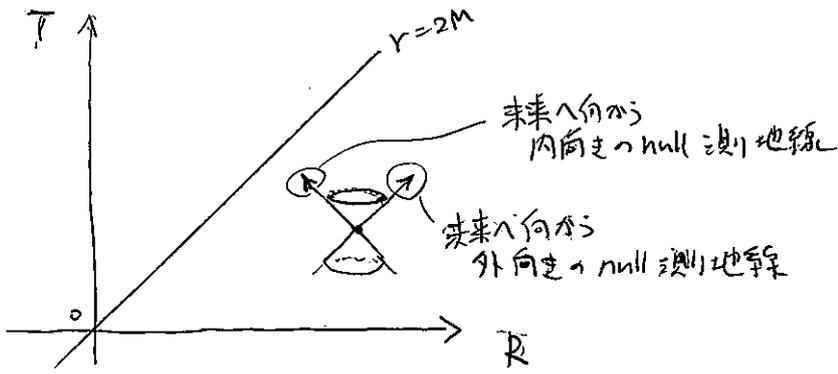
②注 $r \rightarrow 2M$ のとき..

$$T/R = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) \rightarrow \pm 1 \quad (r \rightarrow 2M + 0)$$

$$R/T = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) \rightarrow \pm 1 \quad (r \rightarrow 2M - 0)$$

$\Rightarrow t \rightarrow +\infty$ on $t \rightarrow -\infty$





$r=2M$ の面は、

- 外から落ち込むと脱出できない
- $r < 2M$ の内部から $r > 2M$ の外部へ
- 一切の物質・情報の伝達が不可能 (一方通行面)

$r=2M$ の面 : 事象の地平面 (event horizon)

(無限遠で平坦な時空で)

event-horizon に囲まれた領域 \Rightarrow black hole ..

(Schwarzschild BH.)

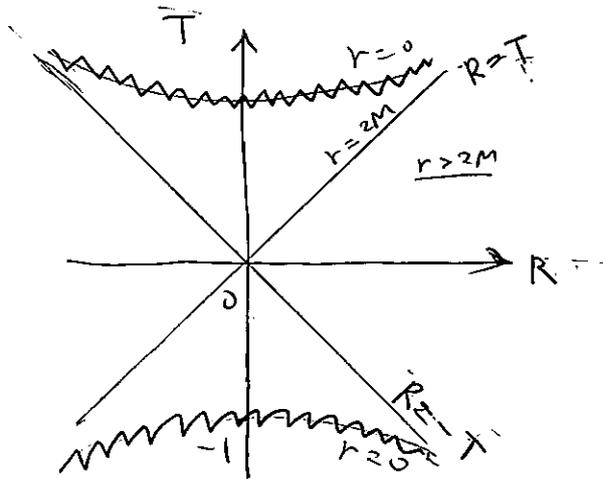
• $r = 0$

$r \rightarrow 0$ での時空の物理量(曲率)は発散する

⇒ Einstein の重力理論は $r \rightarrow 0$ で破綻

$r = 0$ は時空の特異点 (spacetime singularity) とは

特異点 $r = 0 \Rightarrow R^2 - T^2 = -1$ (適角双曲線)



* $r = 0$ の singularity は $r > 2M$ にいる我々からは見えなから、

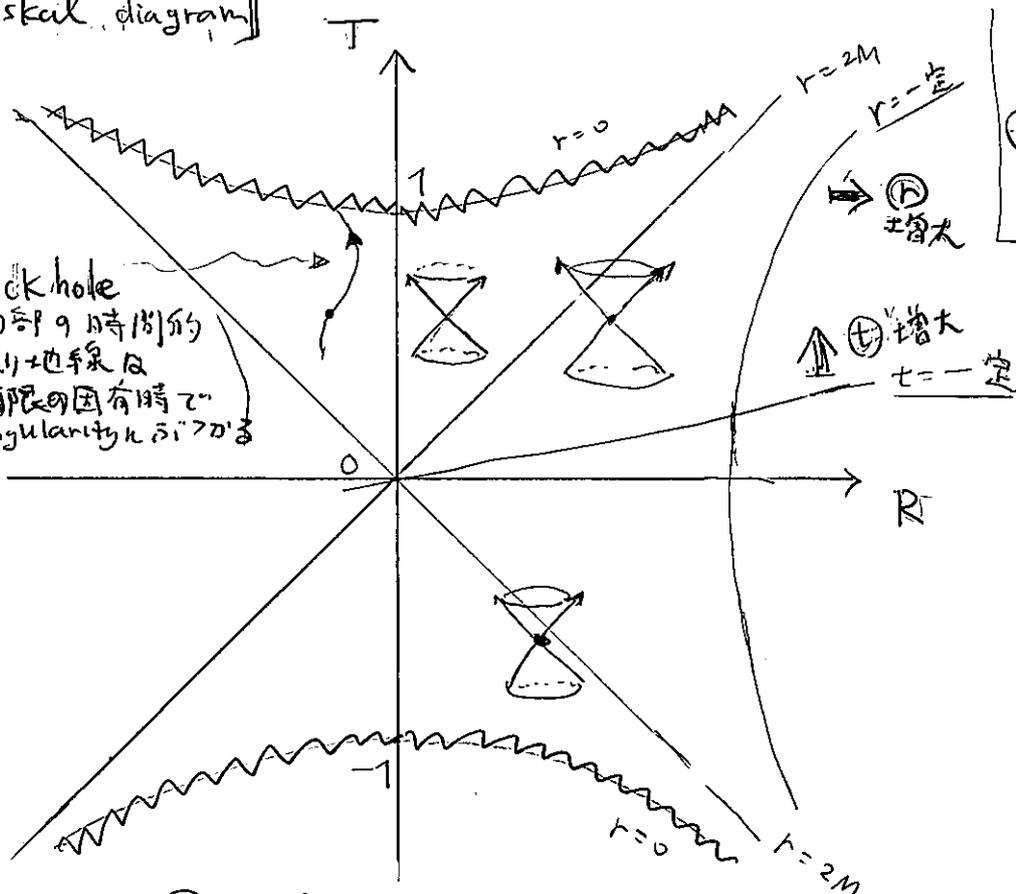
⇒ $r > 2M$ にいる限り、singularity は我々に全く影響を及ぼさなから

↓

一般に、singularity を持つ時空は如何に成立?

"宇宙検閲仮定" (cosmic censorship conjecture)
Penrose (1969)

(Kruskal diagram)



black hole
内部の時間的測地線は有限の固有時間で singularity に至る

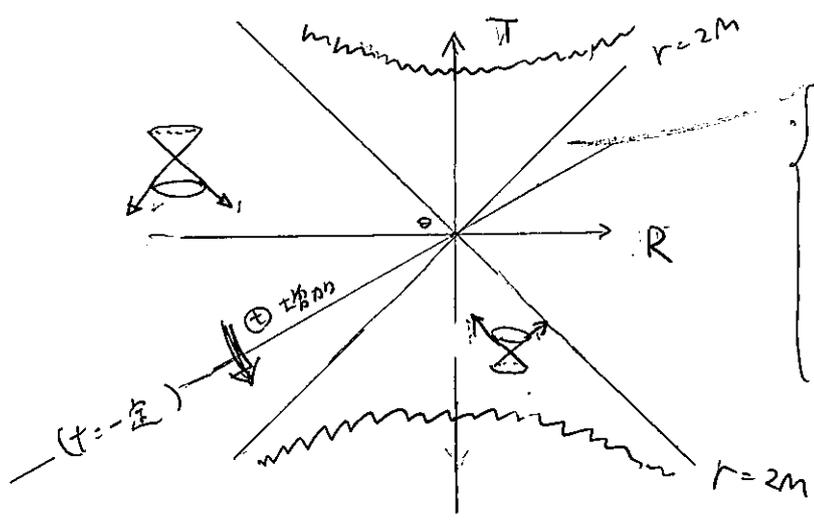
→ ⊕ 増大

↑ ⊕ 増大
t = 一定

①: 我々の宇宙 (black hole の対側)

②: black hole の内部

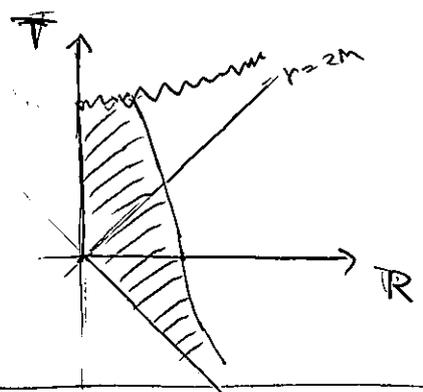
III, IV は何か?



III, IV とこの境界 $r=2M$
 \Rightarrow I, II とこの境界と同じ構造
 \Downarrow
 III: 我々の t のとは別の宇宙

IV と I の境界は, IV \Rightarrow I の一方通行面
 (我々の宇宙から IV へ入れない)
 IV: "white hole"

※ III, IV の領域は時空が真空 (静的 ($t=-\infty$ から ∞ まで変化なし))
 という高度な対称性の仮定から生じている
 \Rightarrow 有限の時刻に生成した black hole 時空には III, IV は存在しない



"重力崩壊"による black hole の生成
 斜線の部分は崩壊する星 \Rightarrow 真空ではない

※※ $r=0$ の singularity の問題
 古典的一般相対論では解決できない
 重力の量子論が必要 (未解決)

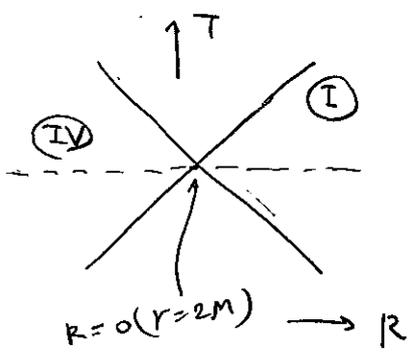
$$\frac{Gm}{c^2} \sim \frac{h}{mc} \Rightarrow m_{pl} = \sqrt{\frac{hc}{G}} \quad (\text{Planck 質量})$$

$$l_{pl} = \frac{Gm_{pl}}{c^2} \approx \sqrt{\frac{hG}{c^3}} \quad (\sim 10^{-35} \text{ m}) \quad (\text{Planck 長さ})$$

$r \sim l_{pl}$ での量子効果が支配的 $\Rightarrow r=0$ は singularity になる
 (?)

Wormhole

① と ④ の 2 つの宇宙が接続する $T=R=0$ を調べる



$T=0$ の面 (space like) の赤道面 $\theta = \frac{\pi}{2}$

を考へる

$$dT = 0, \quad d\theta = 0$$

$$d\tilde{s}^2 = + \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dR^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$= \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\varphi^2$$

\tilde{s}^2 を 3次元 Euclid 空間 (座標 (r, φ, Z)) 内の曲面上の計量とみなすことができる。 ("埋め込み" (embedding))

曲面も $Z = Z(r)$ (φ 方向には回転対称) とす。と

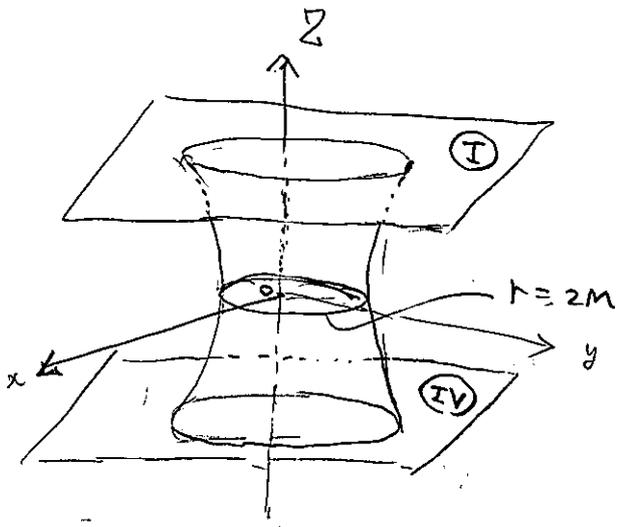
$$d\tilde{s}^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dZ^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\varphi^2$$

$$\Rightarrow dr^2 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2 dr^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$1 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$\therefore \frac{dZ}{dr} = \pm \sqrt{\frac{2M}{r-2M}}$$

$$Z = \pm \sqrt{2M(r-2M)} \quad (r=2M \text{ 時 } Z=0 \text{ となる})$$



Einstein-Rosen の "橋"

① と ④ を結ぶ Wormhole

6-4-2 (共形図 (conformal diagram)
Carter-Penrose diagram

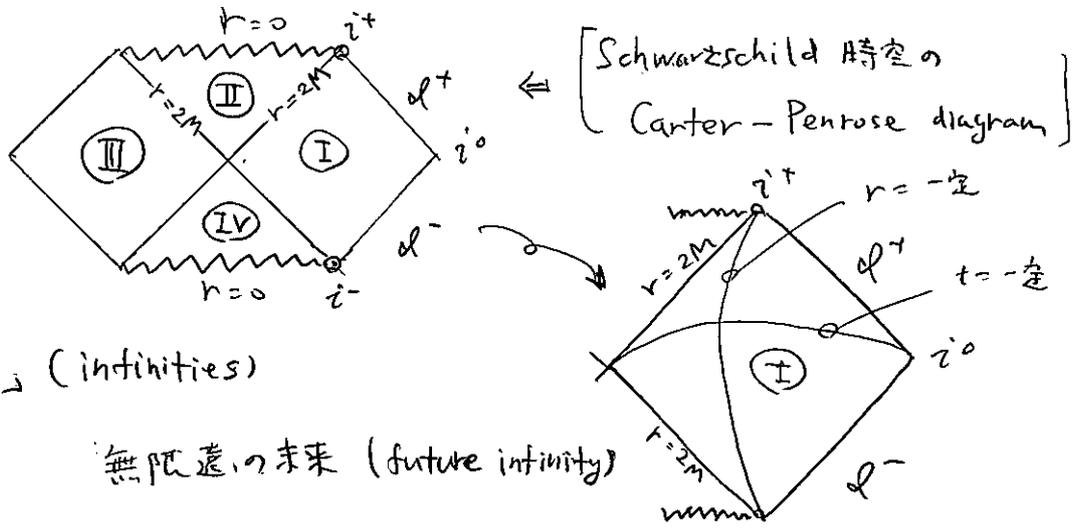
Kruskal diagram を書換えて、時空構造をよりコンパクトに表現したい

Kruskal - Szekeres 座標 (T, R) を更に変換

$$(T, R) \longrightarrow (u, v)$$

$$\begin{cases} T+R = \tan\left[\frac{1}{2}(u+v)\right] \\ T-R = \tan\left[\frac{1}{2}(u-v)\right] \end{cases} \quad (27)$$

- 光円錐の傾きは $\pm \frac{\pi}{4}$ と不変
- 無限遠か有限の座標で表現される



無限遠 (infinities)

- i^+ : 無限遠の未来 (future infinity)
- i^- : " 過去 (past infinity)
- i^0 : 空間的無限遠 (spatial infinity)
- \mathcal{I}^+ : null 線に沿った無限の未来 (future null infinity)
- \mathcal{I}^- : " 過去 (past null infinity)

cf. Minkowski 時空の Carter - Penrose diagram

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$\left. \begin{aligned} t+r &\equiv \tan \frac{1}{2}(\psi + \xi) \\ t-r &\equiv \tan \frac{1}{2}(\psi - \xi) \end{aligned} \right\} (t, r) \rightarrow (\psi, \xi)$$

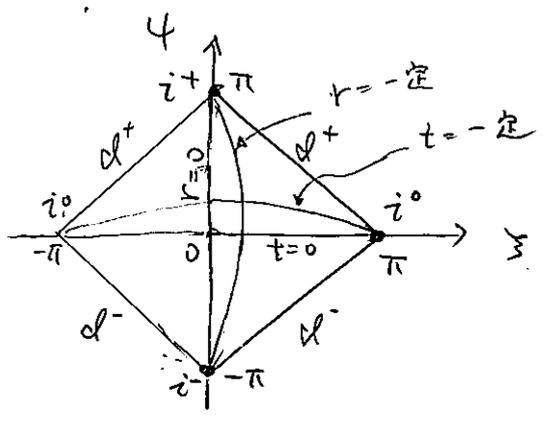
$$dt+dr = \frac{1}{2}(d\psi + d\xi) \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}(\psi + \xi)}$$

$$dt-dr = \frac{1}{2}(d\psi - d\xi) \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}(\psi - \xi)}$$

$$\left[-(dt+dr) \cdot (dt-dr) \right]$$

$$ds^2 = - \frac{d\psi^2 - d\xi^2}{4 \cos^2 \frac{1}{2}(\psi + \xi) \sin^2 \frac{1}{2}(\psi - \xi)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

ψ : 時間的座標



Minkowski 時空の Carter - Penrose diagram

Hawking, S.W., Ellis, G.F.R.: The large scale structure of spacetime, Cambridge

Frolov, V.P., Zelnikov, A.: Introduction to Black Hole Physics, Oxford

Wald, R.M.: General Relativity, University of Chicago

Hawking, S.W., Penrose, R.: The Nature of Space and Time, Princeton

佐藤文隆, R.ルブニニ: ブラックホール - 一般相対論と星の終末, 筑摩書房

江里白良治: 時空のゆがみとブラックホール, 講談社

16-4-3 Wormhole と タイムマシン

M.S. Morris, K.S. Thorne, U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett., 61, 1446 (1988)

(M.S. Morris, K.S. Thorne, Am. J. Phys., 56, 395 (1988))

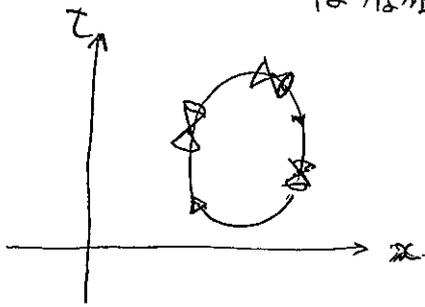
一般相対論における、過去に戻る「タイムマシン」

時間的な世界線を「未来」へ向かって進むと

自分自身の過去の事象へと戻るという可能性

閉じた時間的曲線 (closed time-like curve, CTC)

は存在できるか?



Thorne 達のアイデア

wormhole の一端を光速に近い速さで往復させる。

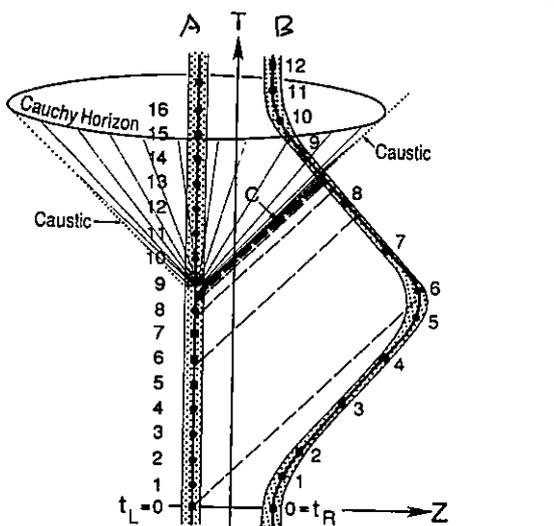
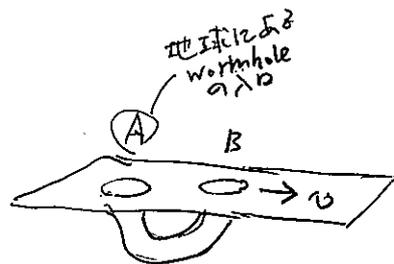


FIG. 2. Spacetime diagram for conversion of a wormhole into a time machine.

Morris, Thorne, Yurtsever (1988)



B が戻ってきたとき、B と同時な事象は A の過去となる



時刻 t_1 に付近の観測者が B に入ると、

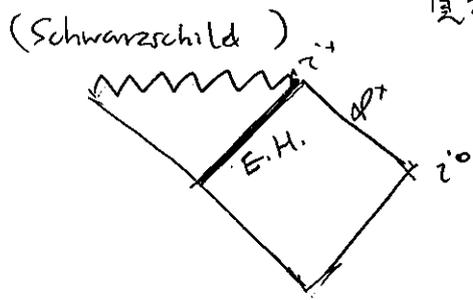
A から出たときの時刻 t_2 は

$t_2 < t_1$

§ 7. 自転する black hole - Kerr 解

・ 事後の地平面 (event horizon; E.H.)

我々のいる宇宙の領域から、無限の未来まで見えない (情報を受けとれない) 領域との境界



) 真空の時空が、

- (i) 時間的に変化しない (定常)
- (ii) ある領域 A が空間的に閉じた E.H. をもつ.
- (iii) A が離れたとき、時空は漸近的に平坦になる.
- (iv) E.H. の外側に特異点は存在しない.

を満たすとき、 A は black hole と呼ばれる.

) Israel (1969) - Hawking (1970) - Carter (1970) - Robinson (1975)

black hole は 3つのパラメータ M, J, Q で指定され、

- Schwarzschild BH (M)
- Reissner-Nordstrom BH (M, Q)
- Kerr (M, J)
- Kerr-Newman (M, J, Q)

しか存在しない.

(M : 質量, J : 角運動量, Q : 電荷)

7-1 Kerr 解 (Kerr 1963)

Boyer-Lindquist 座標 (t, r, θ, φ)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1)$$

ここで, $a = \frac{J}{M}$ (Kerr パラメータ: 長さの次元をもつ)

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (3)$$

① 計量の性質

$$(1) \quad \partial_t g_{\alpha\beta} = 0 \rightarrow \text{定常}$$

$$(2) \quad \partial_\varphi g_{\alpha\beta} = 0 \rightarrow \text{軸対称}$$

$$(3) \quad 0 \leq \frac{a}{M} \leq 1 \quad : \quad \frac{a}{M} = 0 \Rightarrow \text{自転しない (Schwarzschild)}$$

$$\frac{a}{M} = 1 \Rightarrow \text{maximal Kerr}$$

(4) E.H. は $\Delta = 0$ で決まる.

$$r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \Rightarrow r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (4)$$

$$r_+ : \text{outer horizon} \quad (a \rightarrow 0 \text{ とき } r_+ \rightarrow 2M)$$

$$r_- : \text{inner horizon} \quad (a \rightarrow 0 \text{ とき } r_- \rightarrow 0)$$

(5) $g_{tt} = 0$ となる面 \Rightarrow "定常性限界面"

$$1 - \frac{2Mr}{\Sigma} = 0 \rightarrow r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (5)$$

$$(r_0^{(1)} = M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta})$$

(6) 非対角成分が存在: $g_{t\varphi} \neq 0 \rightarrow$ 慣性系が引かれる

1-2 慣性系の引きまわり

質点の Lagrangian ($\theta = \frac{\pi}{2}$ に固定)

$$2L = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{4aM}{r}\dot{t}\dot{\varphi} + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)\dot{\varphi}^2 \quad (6)$$

$$\left(\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} \text{ etc. } \right)$$

(1), (2) より、測地線上を動く点の運動の恒量

$$P_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -E \quad (\text{力学的エネルギー}) \quad (7)$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = L \quad (\text{角運動量}) \quad (8)$$

(6), (7), (8) より

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{(r^2 + a^2 r + 2Ma^2)E - 2aM L}{r\Delta} \quad (9)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{(r-2M)L + 2aME}{r\Delta} \quad (10)$$

いま、 $r \rightarrow \infty$ で角運動量 $L=0$ の粒子を BH に向かって落とすことを考える。($L > 0$)

$L=0$, (9), (10)

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2aM}{r^3 + a^2 r + 2Ma^2} > 0 \quad (\nearrow)$$



BH の自転方向

自由落下する粒子が BH の自転方向に引きずられ「自転」する。

※ 一般に、自転する物体の作る重力場は

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{ij} dx^i dx^j \quad i, j = r, \theta, \varphi$$

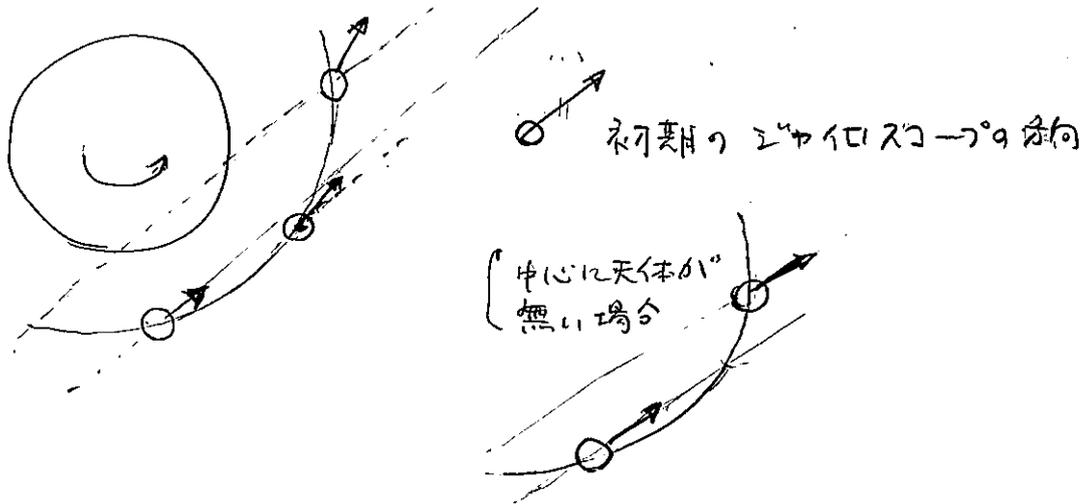
と書ける。慣性系の引きまわりの角速度 ω は

$$\omega = \frac{g_{t\varphi}}{-g_{tt}} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \quad (11)$$

となる

▶ Lense-Thirring 効果 と Gravity Probe B

慣性系のジリヤツクにおいて、自転する天体と周囲のジリヤツクとの歳差運動をする。



Gravity Probe B (2004-2011)

人工衛星を使用して地球自転による慣性系のジリヤツクを測定
→ 5%の誤差で一般相対論の予測と一致

Frame-dragging Effect
39 milliarcseconds/year
(0.000011 degrees/year)

Geodetic Effect
6,606 milliarcseconds/year
(0.0018 degrees/year)

GuideStar
IM Pegasi
(HR 8703)

7-3 定常性限界面

$r > r_0$ の領域で $r = \text{一定}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ に 比較観測者 O_1 を置く
 $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$

① $\Rightarrow -d\tau^2 = g_{tt} dt^2 + \underbrace{(g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{\varphi t} d\varphi dt + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2)}_{2g_{t\varphi} dt d\varphi}$

$u^t \equiv \frac{dt}{d\tau}$, $\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$ とし

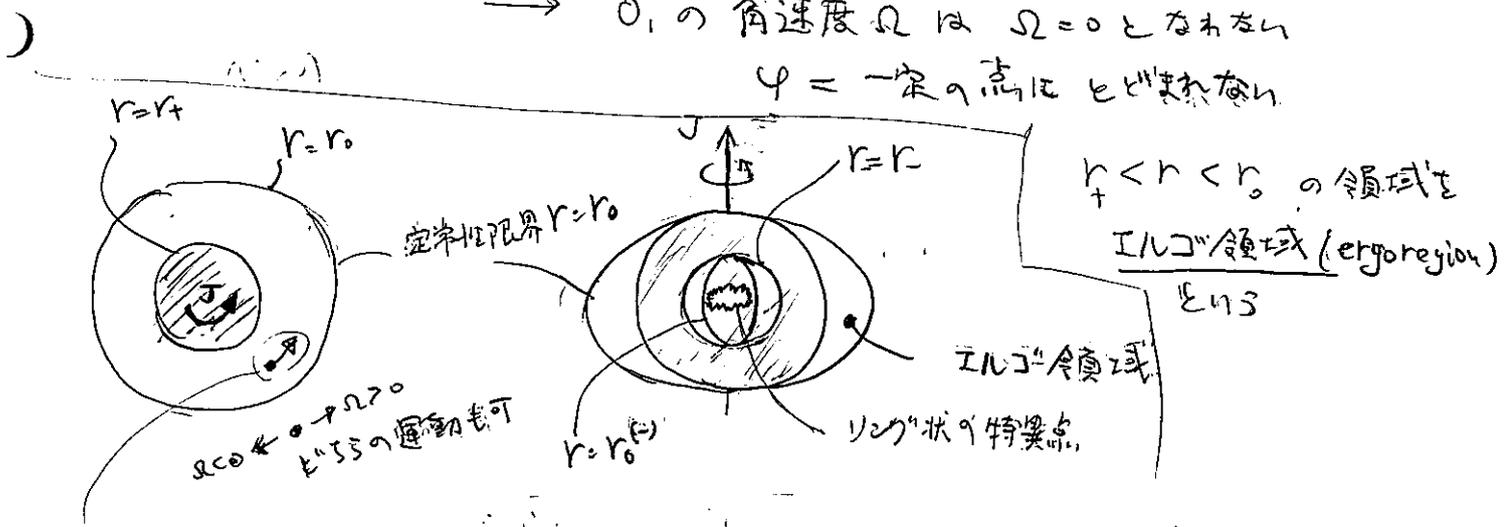
$-1 = \underbrace{(u^t)^2}_{v_0} [g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi}]$

$[] < 0 \Rightarrow \frac{-g_{t\varphi} - \sqrt{(g_{t\varphi})^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}}{g_{\varphi\varphi}} < \Omega < \frac{-g_{t\varphi} + \sqrt{(g_{t\varphi})^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}}{g_{\varphi\varphi}} \quad (12)$
 $\parallel \Omega_{min}$ $\parallel \Omega_{max}$

$\Omega_{min} < 0$ であるから O_1 は $\Omega = 0$ と同じ運動をする。
 $\rightarrow \varphi = \text{一定}$ の点に 比較される。

- r_0 で $\Omega_{min} = 0$
- $r_+ < r < r_0$ の領域では $\Omega_{min} > 0$

$\rightarrow O_1$ の角速度 Ω は $\Omega = 0$ とおける
 $\varphi = \text{一定}$ の高に 比較される。

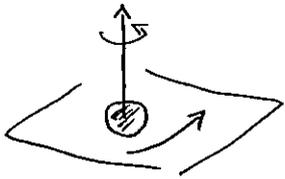


B.H. の自転と同じ方向に 回転している

7-4 Penrose 過程

Kerr 時空の $r > r_+$ の領域での光子の運動

簡単化 \rightarrow 赤道面 $\theta = \frac{\pi}{2}$ への拘束
(対称性から可能)



光子の4元運動量 k^μ

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad \lambda: \text{affine パラメータ}$$

$-k_t \equiv \mathcal{E}, \quad k_\phi \equiv \mathcal{L}$ が保存.

k^μ は null なので

$$k_\mu k^\mu = 0$$

$$\Rightarrow (k^r)^2 = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta}{r^4} \left\{ \mathcal{E}^2 - \frac{4Mr a \mathcal{E} \mathcal{L}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta} - \frac{r^2 - 2Mr}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta} \mathcal{L}^2 \right\}$$

$$= \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta}{r^4} (\mathcal{E} - V_+) (\mathcal{E} - V_-) \quad (13)$$

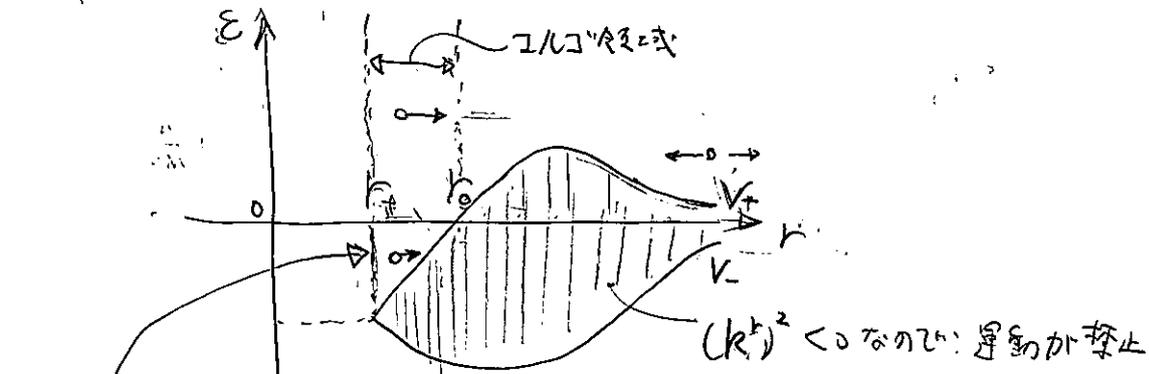
ここで $V_{\pm} = \frac{2Mr a \pm r^2 \sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta} \mathcal{L}$ ($\leftarrow a$ と \mathcal{L} に依存する)

(13) は §6 (c) の式に対応する.

光子の可動領域

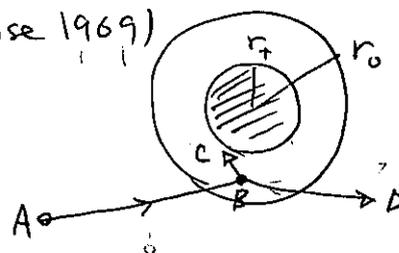
(13) 式で $(k^r)^2 \geq 0$ とする領域を言及する.

特に興味深いのは a と \mathcal{L} が異符号のとき



この領域
では $\mathcal{E} < 0$
の光子が存在する

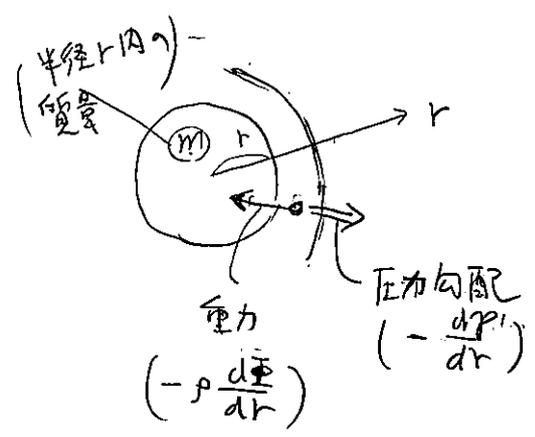
(Penrose 1969)



粒子 A がこの領域に入射
 \downarrow
B 点で光子 C (負エネルギー)
と光子 D は前境
 \downarrow
 $\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_A - \mathcal{E}_C > \mathcal{E}_A$

一般相対論的な星

太陽などの恒星 \Rightarrow Newton的な自己重力とガス圧の勾配が釣り合う



重力ポテンシャル $\leftarrow \frac{d\Phi}{dr}$

ガス圧 $\leftarrow \frac{dp}{dr}$

質量密度 $\leftarrow \rho$

$$\frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = 0 \quad (\text{力の釣り合い})$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2} \quad (\text{重力場})$$

ρ, p などの熱力学的量の間の関係が与えられると解ける

一般相対論的効果の強さの指標

$$\frac{r_g \text{ (重力半径)}}{R \text{ (星の半径)}} = \frac{M}{R} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right) \quad \text{compactness}$$

- 太陽: 2×10^{-6}
- 白色矮星: $\sim 10^{-4}$
- 中性子星, ブラックホール: ~ 0.2
- ブラックホール: 0.5 ($R = 2M$ と可なり)

compactness の大きな星の構造と、それが作り出す時空を
 決める \Rightarrow 流体のエネルギー-運動量を
 源泉とする Einstein 方程式

§=1 Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) 方程式

球対称・静的な時空を考える。

§6. p.15 → $ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ ①

§6. p.15 ① - ② より

$$R = e^{-2\lambda} \left[-2\phi'' - (\phi')^2 + 2\phi'\lambda' + \frac{4\lambda' - \phi'}{r} + \frac{2(e^{2\lambda} - 1)}{r^2} \right] \quad ②$$

すると Einstein テンソルは、

$$\left[\begin{array}{l}
 G_{tt} = e^{2\phi - 2\lambda} \left[\frac{2}{r} \lambda' + \frac{e^{2\lambda} - 1}{r^2} \right] \quad ③ \\
 G_{rr} = \frac{2}{r} \phi' + \frac{1 - e^{2\lambda}}{r^2} \quad ④ \\
 G_{\theta\theta} = e^{-2\lambda} \left[r^2 \phi'' + r^2 (\phi')^2 - \phi' \lambda' + \frac{\phi' - \lambda'}{r} \right] \quad ⑤ \\
 G_{\varphi\varphi} = G_{\theta\theta} \sin^2\theta
 \end{array} \right.$$

星を構成するガスは完全流体とすると、

Einstein-運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad ⑥$$

- ε: 流体の静止系で測り、左 Einstein-密度
- p: " " 圧力
- u^μ: 流体の4元速度

① の座標系では流体は静止している ⇒ uⁱ = 0 (i = r, θ, φ)

$$\therefore g_{tt}(u^t)^2 = -1 \Rightarrow u^t = e^{-\phi} \quad ⑦$$

$$u^\mu = (e^{-\phi}, 0, 0, 0) \rightarrow u_\mu = (-e^\phi, 0, 0, 0) \quad ⑧$$

すなわち (6) は

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon e^{2\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{matrix} t \\ r \\ \theta \\ \varphi \end{matrix} \quad (9)$$

∴ Einstein 方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ の独立な成分は、

$$e^{2\phi-2\lambda} \left[\frac{2}{r} \lambda' + \frac{e^{2\lambda}-1}{r^2} \right] = 8\pi \epsilon e^{2\phi} \quad (10)$$

$$\frac{2}{r} \phi' + \frac{1-e^{2\lambda}}{r^2} = 8\pi p e^{2\lambda} \quad (11)$$

$$e^{-2\lambda} \left[r^2 \phi'' + r^2 (\phi')^2 - \phi' \lambda' + \frac{\phi' - \lambda'}{r} \right] = 8\pi p r^2 \quad (12)$$

$\lambda(r)$ の代わりに $e^{2\lambda} \equiv \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1}$ と置き $m(r) \equiv \frac{2G}{c^2} \lambda$

(cf. Schwarzschild 解
 $g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$)

$$(10) \Rightarrow \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \quad (13) \quad \left(\begin{matrix} \text{Newton 重力? の} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \text{ と似た感じ} \end{matrix} \right)$$

すなわち (11) $\rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{m' + 4\pi r^3 p}{r(r-2m)} \quad (14)$

(Newton 重力 ($G=1$ とする) の
 $\frac{d\phi}{dr} = \frac{m'}{r^2}$ ($r \gg 2m$)
 $p \ll \epsilon$)

更に (12) ($G_{00} = 8\pi T_{00}$) を使, 2つ上の0th 代わりに

$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ を使ると計算は楽になる

$$\nabla_\mu T^{\mu r} = 0 \quad (r \text{ 成分以外は } 0=0)$$

⇓

$$(\epsilon + p) \frac{d\phi}{dr} = - \frac{dp}{dr} \quad (15) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Newton 重力 } 2^{\text{nd}} \\ \rho \frac{d\phi}{dr} = - \frac{dp}{dr} \text{ に対応} \\ (\epsilon \rightarrow \rho, p \ll \rho) \end{array} \right)$$

(14), (15) より

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{(\epsilon + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)} \quad (16)$$

Tolman - Oppenheimer - Volkoff (TOV) 方程式

ρ と ϵ (右辺は ρ と ρ (静止質量密度)) の熱力学的関係

と, 加えての状態方程式 (Equation of State; EOS) とする。

加えてのEOSから与えられたとき, (16) と (13) を解くことで

一般相対論的恒星のモデルが得られる (一般には解析的に解けない)

(手順)

(i) 星の中心 ($r=0$) での密度 ϵ_c と与える。

(ii) (16) と (13) を数値的に積分する $\Rightarrow [\epsilon(r), \rho(r), m(r), \phi(r)]$

(iii) $\rho(r) = 0$ となる点 $r=R$ に到達したら終了。
 $r=R$ は星の表面

$$m(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \epsilon dr \quad \text{は星の重力質量}$$

(iv) $g_{tt} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$, g_{tt} は (15) を積分。

* $r > R$ での (1) の計量は Schwarzschild の解になる。

② 星の重力質量、内部エネルギー、束縛エネルギー

$$M = \int_0^R \epsilon \cdot 4\pi r^2 dr$$

① の計量の固有体積要素ではない

$$dV_p = 4\pi r^2 \cdot e^{2\lambda} dr$$

$$E = \int_0^R \epsilon \cdot dV_p \quad (\text{全エネルギー})$$

$$M_0 = \int_0^R \rho \cdot dV_p \quad (\text{静止質量}) \quad \rho: \text{質量密度}$$

$$U = E - M_0 = \int_0^R (\epsilon - \rho) dV_p \quad (\text{内部エネルギー})$$

重力による束縛エネルギー \bar{W}

$$\bar{W} = E - M = \int_0^R \epsilon \left\{ \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\} \cdot 4\pi r^2 dr$$

③ \square OV 方程式の解析的解

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_0 & (r < R) \\ 0 & (r \geq R) \end{cases}$$

(R, ϵ_0 は決めた値)

可及

$$m(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \epsilon & (r < R) \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \epsilon = M & (r \geq R) \end{cases}$$

$$\rho(r) = \epsilon_0 \cdot \frac{R \sqrt{R-2M} - \sqrt{R^3 - 2Mr^2}}{\sqrt{R^3 - 2Mr^2} - 3R \sqrt{R-2M}}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \ln \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right] & (r < R) \\ \frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{2M}{R} \right] & (r \geq R) \end{cases}$$

u Schwarzschild の内部解

8-2 中性子星

質量 $1 \sim 2 M_{\odot}$ M_{\odot} : 太陽質量 $\sim 2 \times 10^{30} \text{ kg}$
 半径 $\sim 10 \text{ km}$
 平均密度 $\sim 7 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$ (cf. 原子核密度 $\sim 2 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$)

主に 中性子流体から成る (e, p, n, hyperon, quark?)

* 自由 Fermi 粒子 ($T=0$)

相空間体積 $d^3x \cdot d^3p$ 内の状態数
運動量
spin

$$\frac{d^3x d^3p}{h^3} \times 2 =$$

粒子数 $N = \int d^3x \int d^3p \cdot \frac{2}{h^3} = V \cdot \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp$

p_F : Fermi 運動量

数密度 $n = \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3$

$$\rightarrow p_F = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} h \cdot n^{\frac{1}{3}}$$

粒子の速さが c に比べて遅いこと。

加えられたエネルギー密度: $\epsilon = n \cdot m_N c^2$ (m_N : 粒子の質量)

圧力 $P = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} p v \cdot \frac{2}{h^3} \cdot 4\pi p^2 dp$ ($v = \frac{p}{m_N}$)

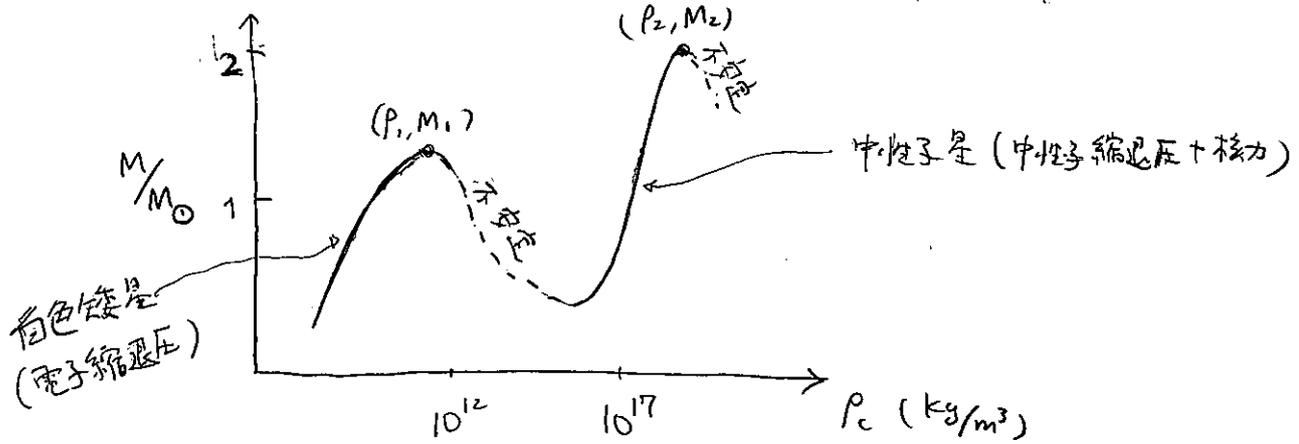
$$= \frac{8\pi}{15 h^3 m_N} p_F^5 = \frac{8\pi h^2}{15 m_N} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{5}{3}} n^{\frac{5}{3}} \propto \epsilon^{\frac{5}{3}}$$

縮退圧

○ 白色矮星では電子の縮退圧が重力と釣り合う

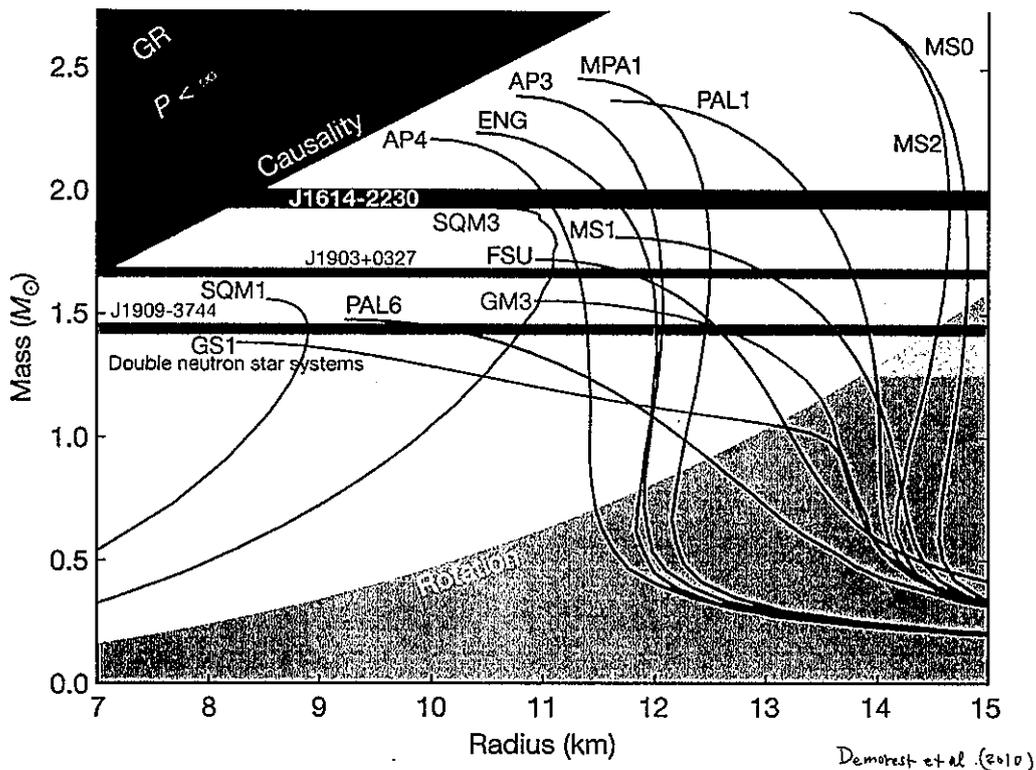
中性子星では中性子の縮退圧に加えて核子間の斥力(核力)も重要

EOSを与え、中心密度 ρ_c をパラメータとして、重力質量 M を計算



与えられた EOS が正しい場合、 M_2 を超える質量の中性子星は存在できない
($\rho_2 <$ 密度)

EOS は 高密度核物質の理論によって異なる。
→ 異なる EOS では $M-R$ 関係が異なる。
質量 半径



Demorest et al. (2010)

0.1 中性子星・パルサー Neutron stars and pulsars

中性子星は、高密度中性子物質の縮退圧と核力が、一般相対論的な自己重力と釣り合って成り立つ星である。その質量は太陽質量程度、半径は 10km 程度で、平均密度が原子核のそれ以上になっている。強い磁場を持って自転する中性子星は、電磁波の周期的変動を示す**パルサー**として観測される。

1 中性子星、パルサー発見の歴史

1932年にチャドウィック (J.Chadwick, 1891-1974) により中性子が発見されると、その二年後にはバーデ (W.Baade, 1893-1960) とツヴィッキー (F.Zwicky, 1898-1974) によって、中性子により構成される冷たい星 (中性子星) の概念が提唱された。これは、当時謎であった超新星爆発のエネルギーが、太陽のような星が非常に小さな中性子星に重力崩壊することで賄われるという、現在でも基本的に正しいアイデアであった。その後の三十年ほどは中性子星そのものが発見、観測されることは無く、その研究は理論先行で行われていた。1962年にジャッコニ (R.Giacconi, 1931-) 等がロケットによる観測で、太陽系外の X 線源さそ座 X-1 を発見したが、1967年にシュクロフスキー (I.Shklovsky, 1916-1985) は、この天体が中性子星と伴星から成り、中性子星が伴星からガスを**降着**することで電磁波を放射している可能性を指摘した (**X 線連星**)。一方、1967年ヒューイッシュ (A.Hewish, 1924-) 等が定期的に電波を発する天体を発見し、翌年にはゴールド (T.Gold, 1920-2004) とパチーニ (F.Pacini, 1939-2012) によって、磁場をもつ中性子星が高速で自転

することで定期的に電波が放射される、という**電波パルサー**のモデルが提唱された。このようなパルサーは 2016 年の時点で二千個以上発見されている。また、可視光や X 線、 γ 線で定期的に放射するパルサーもその後の観測で発見されてきた。

2 中性子星、パルサーの観測

現在までに観測されている中性子星二千個の内のは大半は、電磁波が周期的に変化するパルサーである。周期的な電磁波のパルスは、磁場に起因する非等方的な放射が中性子星の自転で見え隠れすることで起きる (パルサーの”灯台”モデル)。他方で、周期的なパルスが観測されない中性子星も見つかっている。

a. パルサーからの電波、 γ 線放射

電波パルサーは比較的若く磁場の強い中性子星のグループと、年老いて磁場の弱い**ミリ秒パルサー**のグループに大別される (図 0.1)。前者ではおうし座カニ星雲のパルサーのように、周囲にプラズマの風 (**パルサー風**) を吹き出し、それが星周物質と衝突して輝くパルサー星雲を作るものもある。ミリ秒パルサーは磁場は弱い、非常に高速で自転しているために電波を放射しており、また後述の小質量 X 線連星が進化したものと考えられる。電波パルサーの放射機構には未だ分からないことが多いが、磁場を伴った中性子星が自転することで電磁誘導が起き、そこで生じた超高電圧によって荷電粒子 (電子、陽電子) が相対論的な速さに加速されることが原因と考えられている。

b. 中性子星からの X 線放射

X 線放射が観測される中性子星は主に 4 つの型に分類される。

小質量 X 線連星 (LMXB) は、中性子星と太陽より軽い星が成す近接連星系で、

伴星から落下したガスが中性子星に降着する際に加熱され、X線を放射している。これらの中性子星の磁場はパルサーに比べて弱い。降着したガス（主に水素）が中性子星表面で爆発的核融合を起こす現象も観測される（I型X線バースト）。ガス降着は、中性子星の質量だけでなく角運動量も増加させる（スピニアップ）。一億年程度経過して降着が止まると、そこには弱い磁場を持ち高速自転するミリ秒パルサーが残されると考えられている。

X線パルサー（HMXB、大質量X線連星）は電波パルサー程度の磁場をもつ中性子星で、太陽より重い恒星（O,B型星）と連星を成し、伴星からのガスが中性子星に降着してX線を放射する。星の磁場が強いため、ガスは磁力線に沿いつつ磁極に向かって落下する。X線を放射するのはこの磁極付近に降着したガスである。磁極が中性子星の自転によって見え隠れすることでX線パルスが生じる。

カシオペア座Aのような超新星残骸中の若い中性子星は、表面温度が十億Kもの高温であり、ニュートリノや電磁波を熱放射して次第に冷えていく。放射のエネルギー源は中性子星が誕生時に持った熱である。

最後に、超強磁場を持つ**マグネター**は磁場のエネルギーを何らかのメカニズムで解してX線を放射している。マグネターでは自転が遅いため、観測されるX線のエネルギー量は電波パルサーのようなメカニズムでは説明できない。

c. $P - \dot{P}$ 図

周期 P および周期の時間変化率 $\dot{P} = \frac{dP}{dt}$ が測られている中性子星では、それらをプロットした**周期-周期変化率ダイアグラム** ($P - \dot{P}$ 図) が作られる (図 0.1)。磁場を持った中性子星が自転すると、電磁誘導の

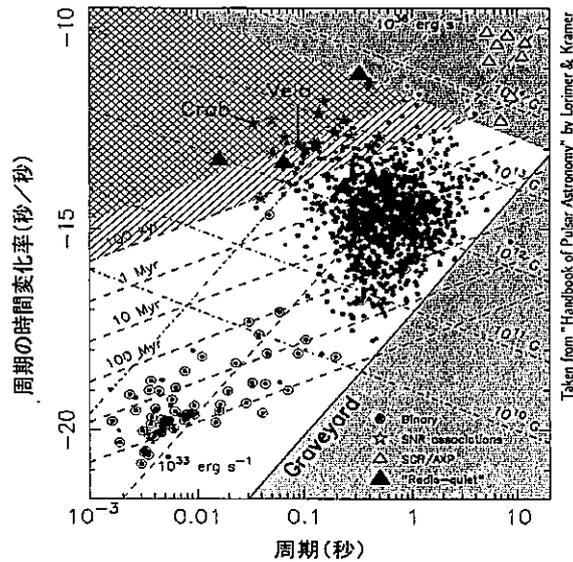


図 0.1 パルサーの周期-周期変化率ダイアグラム ($P - \dot{P}$ diagram)

横軸にパルサーの周期 P 、縦軸に周期の時間変化率 \dot{P} とった図。黒点は通常の電波パルサー、白丸に黒点 (◎) はミリ秒パルサー、星印は超新星残骸内にある若いパルサー、白三角はマグネター、黒三角は電波で見えないγ線パルサー。パルサーからの磁気双極子放射を仮定した場合、左下がりの鎖線は表面磁場が一定の線 (磁場の単位は G(ガウス) = 10^{-4} T(テスラ))、右上がりの破線はパルサーの年齢が一定の線 (kyr = 10^3 年, Myr = 10^6 年)、右上がりの一点鎖線は磁気双極子放射の光度が一定の線 ($\text{erg s}^{-1} = \text{J s}^{-1}$)。"Crab"は、カニ星雲中のパルサー、"Vela"は、ほ座パルサー、図は Lorimer & Kramer (2005)¹⁾ から。

効果でエネルギーを放射して星の自転が減速するので、 \dot{P} はこの磁場の強さで決まると考えられる。図 0.1 において通常の電波パルサーの集団の右下の領域 "graveyard (墓場)" には中性子星はほとんど見つからない。これは減速したパルサーがこの領域に入ると、電磁誘導の効果が弱くなり過ぎてパルサーとしての活動を終えるため、と考えられる。また、通常の電波パルサー集団とミリ秒パルサーの集団が別れて分布しているのが見られる。これは連星系にあるパルサーが graveyard へ落ち込んで活動を停止した後、小質量 X 線連星となって自転を加速され、図の左下の領域 (高速自転)

に向かって graveyard を脱してパルサー活動を再開したためと考えられる。

3 中性子星の構造と性質

中性子星の典型的な性質

- 質量： $1.5M_{\odot}$
- 半径：10 km
- 平均密度： 10^{18} kg/m^3
- 磁場： 10^8 T —電波パルサー, 10^{10} T —マグネター
- 自転周期：0.1 秒—通常のパルサー, 0.001 秒—ミリ秒パルサー, 10 秒—マグネター

a. 観測される中性子星の性質

観測される中性子星, パルサーにおいて重要な物理量はその自転周期, 質量, 半径, 磁場である。特に質量および半径を同時に決めることができれば, 中性子星の状態方程式を決定できるため (→4.7 節), これらの観測的推定は重要な課題になっている。

自転周期はパルサーの場合明らかであるが, 周期的パルスが見えない中性子星の場合に推定は難しい。中性子星の自転周期はマグネターの数秒程度から, ミリ秒パルサーの数ミリ秒まで (現在最も周期が短いパルサーは PSR J1748-2466ad で, 周期は 1.4 ミリ秒) 分布している (図 0.1)。

質量は, 中性子星が連星系にある場合には軌道運動の観測から決定が可能である。パルサーは高精度で安定した時計と見なせるので, 通常の星の連星系よりも精度良く軌道を決定できる。観測的不定性の少ない連星パルサーは $1.4M_{\odot}$ 付近に分布している。一方で, X 線連星系の中性子星の質量は不定性が大きい, $1.4M_{\odot}$ より質量が大きいものが多い。現在のところ最大値 (推定) は PSR J1748-2021B の $2.7M_{\odot}$ である。

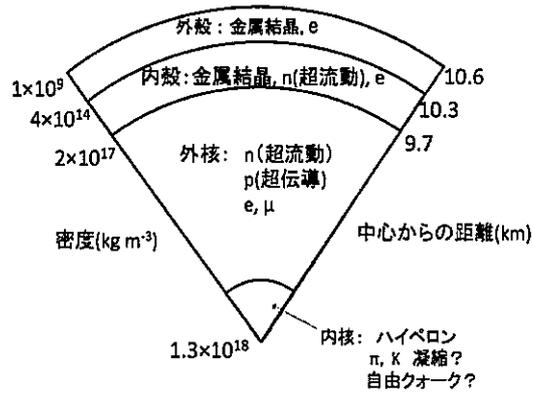


図 0.2 質量 $1.4M_{\odot}$ の中性子星モデルの構造, Pines (1980) による。

半径の決定は質量に比べて難しいが, 小質量 X 線連星では I 型 X 線バーストの観測から (バーストの X 線スペクトル解析による) 制限がつけられている。

表面磁場の推定では, パルサーの周期変化を磁気双極子放射による減速と解釈する。これによると, 電波パルサーの典型的な磁場は $10^8 - 10^9 \text{ T}$, ミリ秒パルサーや小質量 X 線連星は $< 10^5 \text{ T}$, マグネターは $10^{10} - 10^{11} \text{ T}$ 程度となる。また, X 線パルサーでは磁極に降着したプラズマ中の電子が, 磁場に比例した特徴的なエネルギー準位をもつため, スペクトル観測 (サイクロトロン吸収線) から磁場が決定できる ($\sim 10^9 \text{ T}$)。

b. 中性子星の構造

中性子星の構造は, 未知の高密度核物質の物性に強く依存しているため分からないことが多いが, 標準的なモデルの中性子星は外側から内側に向かって次のような構造を持つとされる:

- 外殻: 鉄 (Fe) より質量数の大きな重原子イオンの結晶 (金属)。内側に向かって原子番号, 質量数が増加し, 中性子過剰な原子核へ変化する (質量数

≤ 130).

- 内殻: 外殻より**中性子過剰核**が増えていき, 原子核が不安定化する. 不安定化した原子核から中性子が溢れだし (**neutron drip**), 原子核に束縛されない自由中性子が増えていく. 自由中性子は**縮退**し, **超流動状態**にある.
- 外核: 原子核は全てバラバラになり, 中性子を主に含む(陽子, 電子も少量存在) 一様な核物質となる. 中性子は高密度な内部で超流動状態, 陽子は**超伝導状態**にある.
- 内核: 中性子流体に, sクォークを含む重核子(ハイペロン)が混じる, π, K などの中間子が凝縮状態にある, あるいはクォークが核子から溢れだして自由クォーク相にある, などの可能性が考えられている.

c. 中性子超流動とグリッチ

外核, また内殻内では, 核力によって中性子対が形成され(**クーパー対**) これらがボース粒子のように凝縮(対凝縮)することで超流動状態になると考えられている. 対形成の転移温度は十億 K 程度なので, これ以下の温度は中性子星においては「**極低温**」と言える. 中性子星が自転している場合, 中性子超流体は多数の**量子化された渦糸**を作って回転している. また外核では自由な**クーパー対**も存在し, それらも核力でクーパー対を作って凝縮し超伝導状態にあると考えられている.

中性子超流体は, 陽子, 電子あるいは内外殻の金属結晶(荷電成分)と非常に弱く相互作用している. パルサーが磁場による放射でスピンドウンするとき, 荷電成分のみが直接減速される. このため, それと相互作用の弱い中性子流体はわずかにそれらより速く回転している. 両者の速度差があ

る程度大きくなると, 中性子の量子渦が集団で移動をして荷電成分に角運動量を再配分する現象が起きると考えられている. しかしこのメカニズムの詳細はよくわかっていない. 角運動量を受け取った荷電成分, とくに外殻はこのとき突然スピンアップする. 電波パルサーの長期に渡る観測で, 突然その自転周期が短くなる現象が見つまっている(**グリッチ**). これは, 中性子超流体と荷電成分(および常流動中性子)との上のような相互作用で起きていると考えられている.

4 中性子星を用いた天文学

パルサーからの電波が星間物質を通過するとき, 波長によって伝播速度が異なり, パルス到達時刻に波長による差が生じる. この差はパルサーと地球の間の電子柱密度に比例するため, その測定から星間物質密度が推定できる(**分散量度, DM**). また, 電磁波が磁場を伴った媒質中を伝播すると, 直線偏光の偏光面が回転する現象(**ファラデー回転**)が起きる. これを利用して, 星間磁場の視線方向の積分量が推定できる(**回転量度, RM**). 銀河系内のパルサーの観測で, 星間物質や銀河磁場の空間分布が調べられている.

(吉田慎一郎)

文 献

- 1) D.Lorimer & M.Kramer, Handbook of Pulsar Astronomy, Cambridge Observing Handbooks for Research Astronomers 4 (Cambridge University Press; 2005)

§9. 一般相対論的宇宙論

cf: 松原「現代宇宙論」東京大学出版会

9-1 一様・等方性の仮定

【仮定】— 大きなスケール (≧ 100 Mpc) で平均すると、観測者の集団として
それらから見た宇宙の様子が 同様 (一様) かつ 方向によらない (等方) な
ものか存在する。 (宇宙原理)

* 1 Mpc = 10⁶ pc
= 3 × 10²² m

このような観測者集団 \mathcal{O} を用いて宇宙を記述する。

(a) \mathcal{O} の要素の世界線は交わらない

仮に $A, B \in \mathcal{O}$
の世界線が
交わるとすると、

ここで A, B をそれぞれ定義する「等方性」に矛盾

A の静止系 $u_A^\alpha = (1, 0, 0, 0)$

Aから見て等方

$u_B^\alpha \neq u_A^\alpha$
Bと共に動く球体
はAから Lorentz
収縮 (して) いる

(b) (a) から、自然な空間座標が $\rho^2(A) = \text{一定} (A \in \mathcal{O})$ と導入できる。

(c) 一様性から、 \mathcal{O} の要素は共通の固有時 t を持つ。これを universal な時間座標とする。

(d) (b), (c) の座標 x^μ の計量は

$$ds^2 = -dt^2 + 2g_{0j} dt dx^j + g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1 \sim 3)$$

(e) 等方性の仮定から、 $g_{0j} = 0$ (ただし、ある k に対して $g_{0k} \neq 0$ なる x^k 座標方向は特殊な方向)

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (2)$$

(f) ある時刻 t での AB 間距離 ($A, B \in \mathcal{O}$) を dL_{AB}^2 とすると

$$dL_{AB}^2 = g_{ij}(t; x^k(A)) dx^i dx^j \quad (dx^i = x^i(B) - x^i(A))$$

(i, j, k = 1 \sim 3)

$t + \delta t$ での AB 間の距離 \bar{dL}_{AB}^2

$$\begin{aligned} \bar{dL}_{AB}^2 &= g_{ij}(t + \delta t; x^k(A)) dx^i dx^j \\ &= \left(g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \delta t \right) dx^i dx^j = (g_{ij} + \lambda_{ij} \delta t) dx^i dx^j \\ &= dL_{AB}^2 + \delta t \lambda_{ij} dx^i dx^j \quad \left(\lambda_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \ln |g_{ij}| \right) \end{aligned}$$

λ_{ij} が空間座標に依存すると一様性が破れてしまふ。

$$\Rightarrow \lambda_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \ln |g_{ij}| = C(t)$$

$$\Rightarrow \ln |g_{ij}| = \int C(t') dt' + K_{ij}(x^k)$$

(空間座標)

$\therefore g_{ij} = a(t)^2 \cdot \gamma_{ij}(x^k)$ と変数分離した形を書く。

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (3) \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x^k)$$

(g) 宗曲率空間

宇宙の一様性 \Rightarrow $t = \text{一定}$ の 3次元空間のスカラ曲率 (γ_{ij} から計算) が定数となる。

(1) 等方性から $\gamma_{ij} dx^i dx^j$ を次のように書く

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = f(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4)$$

この計量 (4) から計算される 3次元のスカラ曲率 $R^{(3)}$ は

$$R^{(3)} = -\frac{2}{r^2} \left(\frac{f}{r} - r \right)' \quad (5) \quad \left(\gamma' = \frac{d\gamma}{dr} \right)$$

これがある定数 C_0 と等しいと仮定して

$$f = \left(1 - \frac{C_0}{6} r^2 + \frac{D}{2r} \right)^{-1}, \quad D: \text{積分定数} \quad (6)$$

$r \rightarrow 0$ の ④ は平坦な空間に近づくため、 $D = 0$

③

$$\therefore \gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{1}{1 - \frac{c}{6} r^2} dr^2 + r^2 \frac{d\Omega^2}{R^2} \quad \text{⑦}$$

定数 $C \in C = 6K$ とし直せば、

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad \text{⑧}$$

Robertson-Walker (RW) 計量

($a(t)$: スケールファクター
 K : 空間曲率)

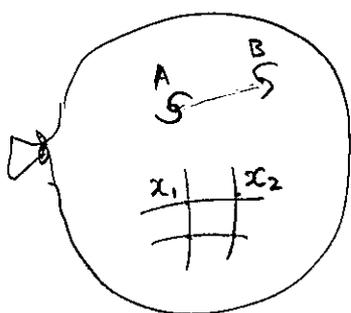
9-2 Robertson-Walker 計量の性質

) 空間座標 $\begin{cases} (t, \theta, \varphi) \\ (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow$ 共動座標 (comoving coordinate)

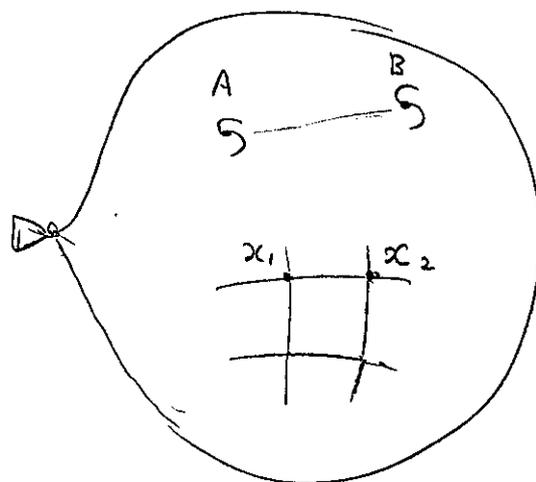
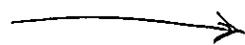
$$\left. \begin{aligned} X &\equiv a(t) r \sin\theta \cos\varphi \\ Y &\equiv a(t) r \sin\theta \sin\varphi \\ Z &\equiv a(t) r \cos\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{固有座標 (proper coordinate)}$$

膨張(収縮)する宇宙では、銀河等の天体は ほぼ 共動座標 = 一定

となっている \Rightarrow 銀河間の距離の変化は 固有座標 の変化として見える。



時刻 t
 $a(t)$



時刻 t'
 $a(t')$

銀河 A, B の 共動座標 は時刻 t よりも一定

\rightarrow 固有距離 は $t \rightarrow t'$ で、 $\frac{a(t')}{a(t)}$ 倍になる

⑧ の空間部分を座標変換してみる。

$$\chi \equiv \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-Kr'^2}}, \quad r = S_K(\chi) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(\sqrt{K}\chi)}{\sqrt{K}} & (0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}) \dots K > 0 \\ \chi & (0 \leq \chi < \infty) \dots K = 0 \\ \frac{\text{sinh}(\sqrt{-K}\chi)}{\sqrt{-K}} & (0 \leq \chi < \infty) \dots K < 0 \end{cases}$$

すなわち ⑧ は (座標 $(t, r, \theta, \varphi) \rightarrow (t, \chi, \theta, \varphi)$)

⑨

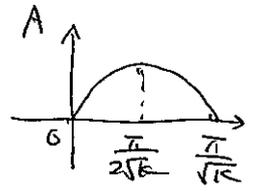
$$\begin{aligned}
 \text{⑧} \Rightarrow ds^2 &= -dt^2 + a(t)^2 \left\{ \frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 dx^2}{1-K S_K(\chi)^2} + S_K(\chi)^2 d\Omega^2 \right\} \\
 &= -dt^2 + a(t)^2 \left\{ \frac{(1-K S_K^2) dx^2}{1-K S_K^2} + S_K^2 d\Omega^2 \right\} \\
 &\equiv -dt^2 + a(t)^2 (d\chi^2 + S_K(\chi)^2 d\Omega^2) \quad \text{⑩}
 \end{aligned}$$

χ を 動径座標とみると、 $S_K(\chi)$ は $\chi = \text{一定}$ の 2次元球面の面積 と与える。

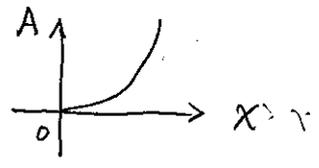
$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{l} t = \text{一定} \\ \chi = \text{一定} \end{array} \right. & \text{2次元球面の面積 } A = S_K^2(\chi) \int_{4\pi} d\Omega^2 \\
 &= 4\pi S_K^2(\chi)
 \end{aligned}$$

この面積は

$$\begin{aligned}
 K=0 &: A = 4\pi \chi^2 && \text{3次元 Euclid空間} \\
 K>0 &: A = 4\pi \frac{\text{sh}^2(\sqrt{K}\chi)}{K} && \left. \begin{array}{l} \chi = \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \text{ で最大} \\ \chi = \frac{\pi}{\sqrt{K}} \text{ で } 0 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$



$$K < 0: A = \frac{4\pi \text{sinh}^2(\sqrt{-K}\chi)}{-K} \quad ; \quad \chi \rightarrow \infty \text{ で指数関数的に増大}$$



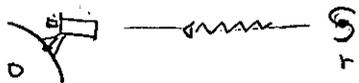
$K=0$: 平坦な空間
 $K>0$: 閉じた空間
 $K<0$: 開いた空間

9-3) 遠方天体の赤方偏移と宇宙マイクロ波背景放射

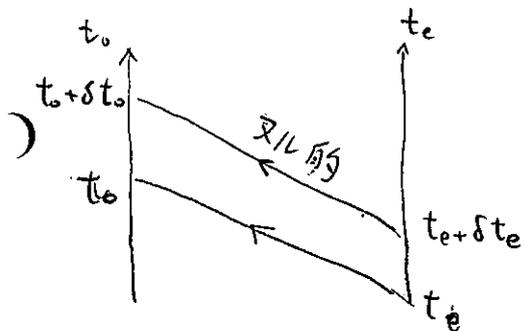
座標原点にいる観測者が時刻 t_0 に遠方の天体から光を受検 ($t_e = t_e$ に発光) (共動座標上)

⑧) 光の世界線

$$ds^2 = 0 \Rightarrow -dt^2 + \frac{a(t)^2}{1-kr^2} dr^2 = 0$$



$$\Rightarrow \int \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (11)$$



$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad \left(= \int \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \right)$$

$\leftarrow t$ は t_0 以上

$$\therefore \frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} \quad (12)$$

δt が 光の振動の 1 周期 とすると

$$\frac{1}{\delta t_e} = \nu_e = \frac{c}{\lambda_e} \quad \left(\begin{array}{l} \nu_e: \text{天体で発した光の振動数} \\ \lambda_e: \text{波長} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{\delta t_0} = \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \quad \left(\begin{array}{l} \nu_0: \text{観測された振動数} \\ \lambda_0: \text{波長} \end{array} \right)$$

$$\therefore \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (13) \quad \left(\text{or } \frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} \right)$$

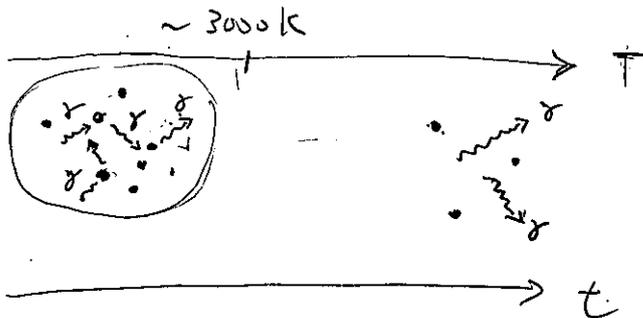
$t_0 > t_e$ 故 $a(t_0) > a(t_e)$ 故 $\lambda_0 > \lambda_e$ (赤方偏移)

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (14) \Rightarrow 1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (15)$$

* 2.7Kの宇宙マイクロ波背景放射

- 宇宙膨張 → 時間と共に戻ると高温・高密度の過去

↓
物質 (e, p, n, ...) と放射 (γ, ν, ...) が熱平衡にある



高温・高密度から始まる宇宙が膨張して冷えていく。

「火の玉宇宙」 (Big bang 宇宙) (Gamow 1948)

- T ~ 3000K 程度で "e + (イオン) → (中性原子)" の

反応が進み、e + γ 散乱が抑えられる (宇宙の晴れ上がり) → Z₀ ≈ 1100

▷ 晴れ上がり時の光は今、どう見えるか?

晴れ上がり (時刻 t₀, 温度 T) での光子数密度 (ν ~ ν + δν 間) ^{振動数}

$$dn = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (16)$$

宇宙膨張で光子数は変化しないので、

$$dn \cdot a(t)^3 = dn' \cdot a(t')^3 \quad (t' > t_0)$$

$$dn' = \left(\frac{a(t_0)}{a(t')} \right)^3 \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (17)$$

t = t₀ での ν ~ ν + δν 間にある光子の振動数は、ν' = ν · $\frac{a(t_0)}{a(t')}$

$$\therefore dn' = \frac{8\pi}{c^3} \frac{(\nu')^2 d\nu'}{\exp(h\nu'/kT') - 1} \quad (18) \quad (T' = T \cdot \frac{a(t_0)}{a(t')})$$

温度 T' の黒体放射

$$T' = 3000 \cdot \frac{a(t_0)}{a(t')} = \frac{3000}{1 + Z_0} = 2.7 \text{ K} \quad (a(t') = 1) \quad \text{現在}$$

→ CMB (Penzas, Wilson 1964)

9-4 Friedmann 方程式

⑧ RW 計量から曲率を計算

(t, r, θ, φ)

⑨

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K}{1 - Kr^2}$$

$$R_{22} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)$$

$$R_{33} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K) \sin^2 \theta$$

$$R = R^\mu{}_\mu = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right]$$

$$\dot{a} \equiv \frac{d}{dt} a(t)$$

他の成分は 0

宇宙を満たす物質が完全流体の条件を満たすとする。

物質は共動座標系に対して静止

$$\rightarrow \text{4元速度 } U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (U_\mu = (-1, 0, 0, 0))$$

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}$$

ϵ : エネルギー密度

p : 圧力

$$= \begin{bmatrix} \epsilon & & & \\ & pg_{11} & & \\ & & pg_{22} & \\ & & & pg_{33} \end{bmatrix}$$

$$, T = T^\mu{}_\mu = -\epsilon + 3p$$

宇宙項を代入した Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = 8\pi (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (20)$$

$$(0,0) \quad -\frac{3\ddot{a}}{a} = 8\pi \left(\epsilon - \frac{1}{2}(-1) \cdot (-\epsilon + 3p) \right) - \Lambda(-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\epsilon + 3p) + \frac{\Lambda}{3}} \quad (21)$$

$$(1,1) \quad \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K}{1 - Kr^2} = 8\pi \left(\frac{pa^2}{1 - Kr^2} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{1 - Kr^2} \cdot (-\epsilon + 3p) \right) + \Lambda \frac{a^2}{1 - Kr^2}$$

$$\left(\times \frac{1 - Kr^2}{a^2} \right) \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{K}{a^2} = 4\pi(\epsilon - p) + \Lambda \quad (22)$$

②② は ②① を用いて

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \epsilon - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}} \quad (23)$$

(21), (23) \Rightarrow Friedmann 方程式 ($a(t)$ の時間発展方程式)

また $\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0$ より

$$\dot{\epsilon} + 3(\epsilon + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (24) \quad (\epsilon \text{ の時間発展方程式})^{**}$$

Friedmann 方程式の解としての宇宙モデルは、

- ϵ と p の関係 (状態方程式)
- K の値 (宇宙の曲率)
- Λ の値 (宇宙項の大きさ)^{*}

で決まる。

* Λ の効果

(13) より $\ddot{a} = -\frac{M}{a^2} \quad ; \quad M \equiv \frac{4\pi}{3} a^3 \left(\epsilon + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi} \right)$

(21) $\ddot{a} = -\frac{GM}{a^2}$

半径 a の領域内の "密度" $\epsilon + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi}$

$M = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho \Rightarrow$ 球の内部の "質量"

ϵ, p : 引力を生む

$\Lambda (> 0)$: 斥力

** (24) 式は (23) 式を時間微分して (21) を用いても得られ

9-5 状態方程式

宇宙論で ϵ と p の関係は次のように書く

$$p = w \epsilon \quad (25)$$

$$\left. \begin{array}{l} w = 0 \\ w = \frac{1}{3} \\ w = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{：“ダスト” (圧力ゼロ)} \\ \text{：“放射”} \\ \text{：“真空のエネルギー”} \\ \text{(宇宙項)} \end{array}$$

* “放射”

電磁波 (光子) のような質量ゼロの粒子

$$T_{(EM)}^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\alpha} F_{\lambda\alpha} \quad (F^{\mu\nu}: \text{電磁場テンソル})$$

$$T_{(EM)\mu}^{\mu} = 0 \Rightarrow -\epsilon + 3p = 0 \quad \parallel$$

$$\textcircled{24} \text{ 点) } \quad \dot{\epsilon} = -3(\epsilon + w\epsilon) \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\rightarrow \epsilon \propto a^{-3(1+w)} \quad \textcircled{26}$$

→ スケールファクターの変化に応じてエネルギー密度の変化

$$\cdot w = 0 \Rightarrow \epsilon \propto a^{-3} \quad (\text{粒子の数密度} \propto \text{体積} \propto a^3)$$

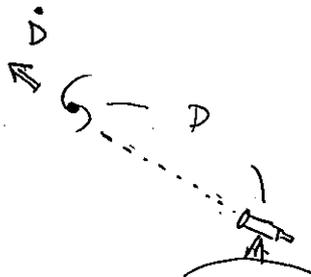
$$\cdot w = \frac{1}{3} \Rightarrow \epsilon \propto a^{-4} \quad (\text{光子の数密度} \propto a^{-3}, \text{光子の波長} \propto a^{-1} \Rightarrow a^{-4})$$

$$\cdot w = -1 \Rightarrow \epsilon = \text{一定}$$

9-6 Hubble パラメータ

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (27)$$

地球を原点にとり、共動座標で $(r, 0, \varphi)$ にある銀河までの固有距離 D



$$D = a(t) \cdot r$$

$$\dot{D} = \dot{a}(t)r = \frac{\dot{a}}{a} ar = H \cdot D \quad (28)$$

Hubble の法則

*) Hubble パラメータは定数ではないが、現在の H の値 H_0 を Hubble 定数と呼ぶことがある。

$$H_0 = 100 \cdot h \quad \text{km/sec/Mpc} \quad \left(\begin{array}{l} 1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc} \\ 1 \text{ pc} \approx 3.1 \times 10^{16} \text{ m} \end{array} \right)$$

$$h = 0.71$$

** Hubble パラメータの次元は [時間]⁻¹

H_0 によって、自然な時間と長さのスケールが定義できる

$$\textcircled{29} \quad t_H \equiv H_0^{-1} = 3.09 \times 10^{17} h^{-1} \text{ sec} \quad \text{Hubble 時間}$$

$$= 9.78 \times 10^9 h^{-1} \text{ yrs.}$$

$$\textcircled{30} \quad d_H \equiv \frac{c}{H_0} = 9.25 \times 10^{20} h^{-1} \text{ cm} \quad \text{Hubble 長}$$

$$= 3.00 \times 10^3 h^{-1} \text{ Mpc}$$

▷ $H(t)$ による重要な無次元量の定義

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (\text{減速パラメータ}) \quad (31)$$

$$\Omega \equiv \frac{8\pi}{3H^2} \epsilon \quad \left(= \frac{8\pi G}{3H^2 c^2} \epsilon \right) \quad (\text{密度パラメータ}) \quad (32)$$

$$\rho_{\text{critical}} \equiv \frac{3H^2}{8\pi} \quad \left(= \frac{3H^2}{8\pi G} \right) \quad (\text{臨界密度}) \quad (33)$$

$\Lambda = 0$ のときの Friedmann 方程式 (23)

$\Rightarrow \Omega - 1 = \frac{K}{H^2 a^2}$ (27)

- $\Omega < 1 \iff K < 0$ 開いた宇宙
- $\Omega = 1 \iff K = 0$ 平坦な宇宙
- $\Omega > 1 \iff K > 0$ 閉じた宇宙

9-7 Friedmann 方程式の解の性質

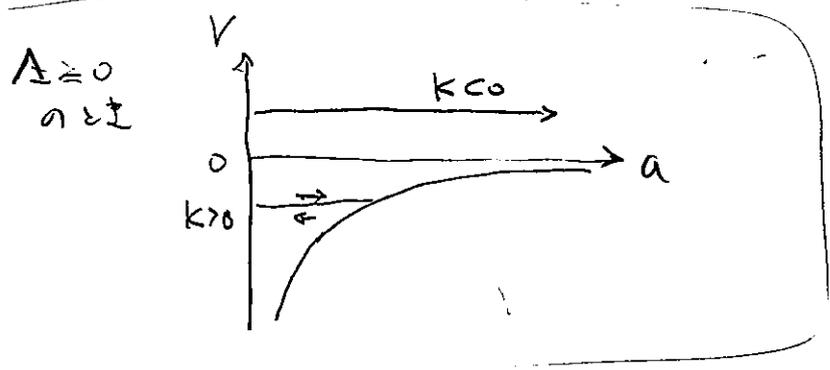
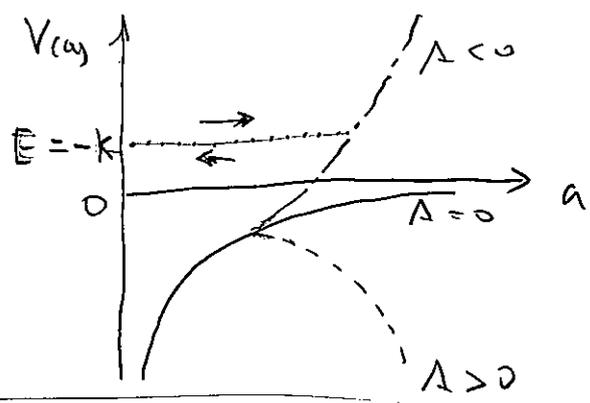
エネルギー密度として ガス K 、放射、宇宙項の寄与を次のように表す

$$E = \underbrace{A a^{-4}}_{\text{放射}} + \underbrace{B a^{-3}}_{\text{ガス}} \quad (\text{9-3})$$

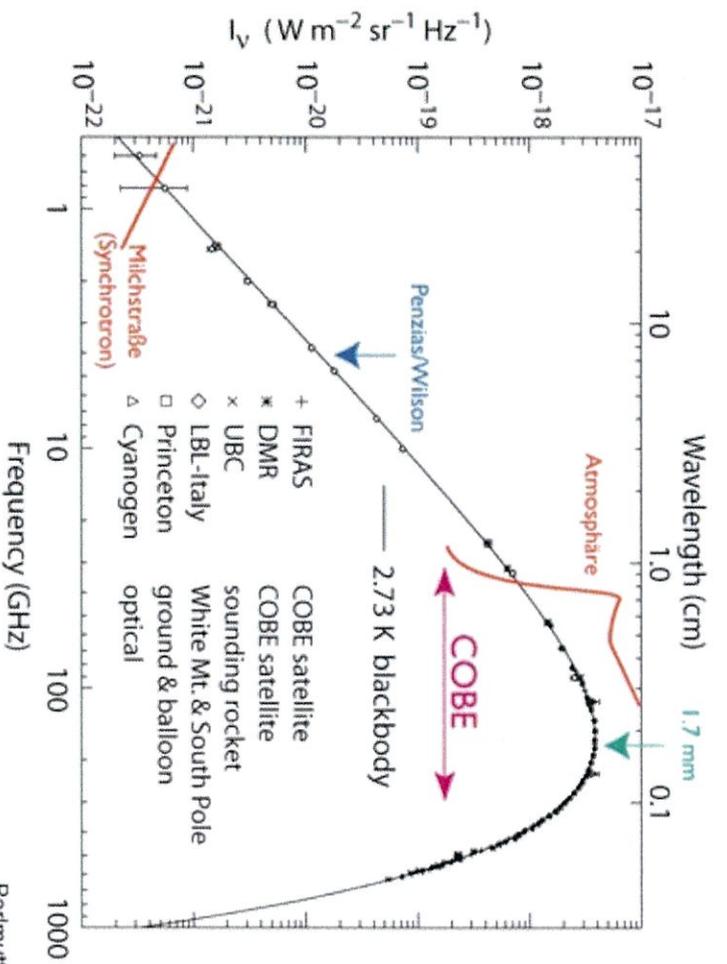
(23) $\Rightarrow \ddot{a}^2 = \frac{8\pi}{3} (A a^{-4} + B a^{-3}) a^2 - K + \frac{\Lambda}{3} a^2$
 $\equiv -V(a) + E \quad (34)$

$E \equiv -K, \quad V(a) = \left(\frac{8\pi A}{3}\right) a^{-2} + \left(\frac{8\pi B}{3}\right) a^{-1} + \frac{\Lambda}{3} a^2 \quad (35)$

(34) は ポテンシャル $V(a)$ 内の質点の座標 $a (a > 0)$ の運動と等価
 (エネルギー $\Rightarrow -K$)

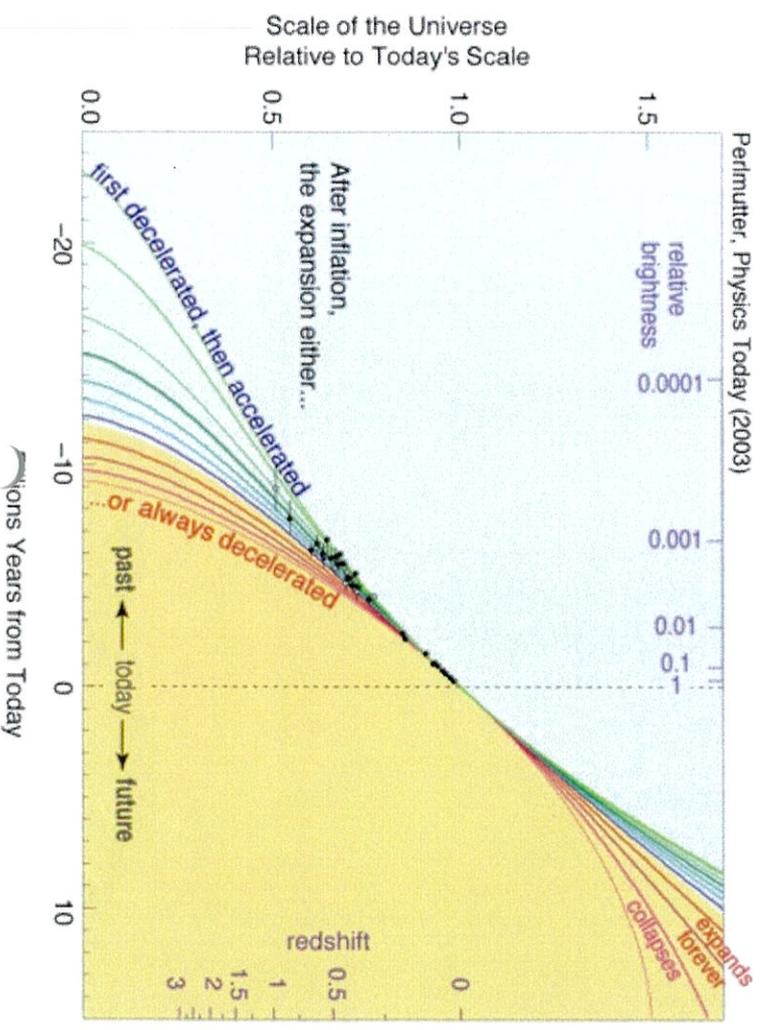


* a が大きくなるほど $\frac{\Lambda}{3} a^2$ の宇宙項が重要になる。
 \Downarrow
 宇宙の加速的膨張 (ダークエネルギー)
 (Riess et al. (1998)
 Perlmutter et al (1999)
 Ia型超新星の観測)



宇宙マイクロ波背景放射の観測

Friedmann方程式の解と、Ia型超新星の観測による
宇宙膨張の様子



10-1 Minkowski 時空からわずかに小さい時空

§5 では、静的、弱い重力、物体の遅い運動 を考へて Einstein 方程式を定めたが、ここでは 静的、物体の遅い運動 の仮定を外す。

(計量) $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ — ① 　で $|h_{\mu\nu}| = \mathcal{O}(\epsilon)$ とする。 ($\epsilon \ll 1$)
 \uparrow
 $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

$h_{\mu\nu}$ は、Lorentz 変換 においてテンソル的に変換する $\eta_{\mu\nu}$ の Minkowski 時空上のテンソルとみなせる。

※ 一般座標変換と異なり、特に Lorentz 変換を考へる。

$$x^\mu = L^\mu_{\alpha'} x^{\alpha'}$$

∴ 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ はこの座標変換により、① の形を保持する。

$$g_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} + h_{\mu'\nu'} \quad ; \quad |h_{\mu'\nu'}| = \mathcal{O}(\epsilon)$$

\uparrow
 $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

すなわち、
 $g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta} = L^\alpha_{\mu'} L^\beta_{\nu'} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})$

$$\eta_{\mu'\nu'} + h_{\mu'\nu'} = \underbrace{L^\alpha_{\mu'} L^\beta_{\nu'} \eta_{\alpha\beta}}_{\eta_{\mu'\nu'}} + L^\alpha_{\mu'} L^\beta_{\nu'} h_{\alpha\beta} \quad (2)$$

$$\therefore h_{\mu'\nu'} = L^\alpha_{\mu'} L^\beta_{\nu'} h_{\alpha\beta} \quad (3)$$

すなわち、 $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$, $h^{\mu}_{\ \nu} = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu}$ など定義される。

次に、 $\mathcal{O}(\epsilon)$ の小さい座標変換として $h_{\mu\nu}$ の振舞いを調べる。

$$x^\mu \longrightarrow \tilde{x}^{\alpha'} = x^\alpha - \xi^\alpha(x) \quad x^{0\nu 3} \quad (2) \quad (|\xi| = \mathcal{O}(\epsilon))$$

$$\frac{\partial \tilde{x}^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \quad (3)$$

$$\therefore \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^{\alpha'}} = \left[\frac{\partial \tilde{x}^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \right]^{-1} = \delta^\beta_\alpha + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \tilde{x}^{\alpha'}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta} = \left(\delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right) \left(\delta^\beta_\nu + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
 &= \eta_{\mu\nu} + \underbrace{\eta_{\mu\beta} \partial_\nu \xi^\beta + \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha}_{\tilde{h}_{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \eta_{\mu\nu} + \partial_\nu (\eta_{\mu\beta} \xi^\beta) + \partial_\mu (\eta_{\alpha\nu} \xi^\alpha) + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \underbrace{\tilde{\eta}_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu}_{\tilde{h}_{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu \quad (5)$$

※ これは座標変換②による変化であり、物理的内容の変化は伴わない。
(一般相対性原理より)

(電磁気学との対比)

EM : ベクトルポテンシャル A^μ

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi = \textcircled{6} \quad \chi : \text{ゲージスカラー場}$$

A_μ と \tilde{A}_μ は 同一の物理的状態を記述する (ゲージ変換)



grav. : ②に現れる ξ^α : 重力場 $h_{\mu\nu}$ のゲージ変換⑤を誘導する

ゲージベクトル場

以下では①の計量について、接続係数と曲率を $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ まで計算.

□ 接続係数

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
 &= \frac{1}{2} (\eta^{\rho\lambda} - h^{\rho\lambda}) \cdot [\partial_\mu (\eta_{\nu\lambda} + h_{\nu\lambda}) + \partial_\nu (\eta_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu}) - \partial_\lambda (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})] \\
 &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} [\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (7)
 \end{aligned}$$

曲率

$$\begin{aligned}
R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} &= \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \underbrace{\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}}_{\text{⑦ es. } \mathcal{O}(\epsilon^2)} \\
&= \frac{1}{2}\partial_{\mu}\{\eta^{\rho\lambda}[\partial_{\nu}h_{\sigma\lambda} + \partial_{\sigma}h_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}h_{\nu\sigma}]\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\partial_{\nu}\{\eta^{\rho\lambda}[\partial_{\mu}h_{\sigma\lambda} + \partial_{\sigma}h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\sigma}]\} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}\{\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\lambda}h_{\mu\sigma} - \partial_{\mu}\partial_{\lambda}h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\lambda\mu}\} \quad \text{⑧}
\end{aligned}$$

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\lambda}h^{\lambda}_{\sigma} - \underbrace{\partial_{\mu}\partial^{\mu}h_{\sigma\nu}}_{\square} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h) \quad \text{⑨}$$

$h = h^{\mu}_{\mu}$

$$R = \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h \quad \text{⑩}$$

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \\
&= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\mu}h^{\mu\nu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \eta_{\mu\nu}\partial_{\kappa}\partial_{\lambda}h^{\kappa\lambda} + \eta_{\mu\nu}\square h) \quad \text{⑪}
\end{aligned}$$

* Q: 上で考えたゲージ変換を行なると、曲率はどのように変化するか？

A: 物理的状態は同一なので、曲率は変化しない

ex. $h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu}$, $h = \tilde{h} - 2\partial_{\mu}\xi^{\mu}$ ⑫ へ代入

$$\begin{aligned}
R &= \partial_{\mu}\partial_{\nu}(\tilde{h}^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\xi^{\nu} - \partial^{\nu}\xi^{\mu}) - \square(\tilde{h} - 2\partial_{\mu}\xi^{\mu}) \\
&= \partial_{\mu}\partial_{\nu}\tilde{h}^{\mu\nu} - \square\tilde{h} \\
&= \tilde{R}
\end{aligned}$$

(18) - (20) について.

- (18), (19) には計量の高々一階の時間微分 (含まれない)
- (20) には S_{ij} の二階微分 (□)

⇒ 連, 生, W_i は力学
 S_{ij} は力学的自由

$0 = \nabla_\nu G^{\mu\nu} = \partial_\nu G^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu G^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu G^{\mu\alpha}$
 $0 = \partial_0 G^{\mu 0} + \partial_i G^{\mu i} + \Gamma G = \partial_t g$ (P.5) (88)
 $G^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の高々一階微分を含まない
 $\partial_{\mu\nu}$
 $\rightarrow (g_{\mu\nu}, \dot{g}_{\mu\nu})$ の時間発展方程式
 $G^{\mu\nu} = 0$ 10 □
 $G^{0\mu} = 0$ 4 □ (-) → 更に4つの条件
 $G^{ij} = 0$ 6 □ → 6-4=2 □ の方
 時間二階微分方程式
 2条件 (拘束条件)

- * (18), (19) : 拘束条件の式
- (20) : 時間発展方程式

cf. 電磁場

$\nabla \cdot B = 0$
 $\nabla \cdot E = 4\pi\rho$

B, E の拘束条件

$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$
 $\nabla \times B = 4\pi j + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$

B, E の発展方程式

10-3 $\eta^{\mu\nu}$ 固定

10-1 で見たように, $h_{\mu\nu}$ には $\eta^{\mu\nu}$ のワキル ξ^α による $\eta^{\mu\nu}$ 変換自由度がある.

⇒ ξ^α をうまく選べば計算の見通しが良くなる. 現象を理解し易くなる.

cf. EM

ベクトルポテンシャル A^α

$\partial_i A^i = 0$ (Coulomb $\eta^{\mu\nu}$ - ξ^α)

$\partial_\mu A^\mu = 0$ (Lorentz $\eta^{\mu\nu}$ - ξ^α) など

Φ, Ψ, W_i, S_{ij} の $\eta^{\mu\nu}$ 変換

$\Phi \rightarrow \Phi + \partial_0 \xi^0$ (21)

$\Psi \rightarrow \Psi - \frac{1}{3} \partial_i \xi^i$ (22)

$W_i \rightarrow W_i + \partial_0 \xi_i - \partial_j \xi^0$ (23)

$S_{ij} \rightarrow S_{ij} + \partial_{[i} \xi_{j]} - \frac{1}{3} \partial_k \xi^k \cdot S_{ij}$ (24)

10-2 重力場の自由度

$h_{\mu\nu}$ の各成分を 3次元空間での変換性で分類

(4次元時空を 3次元(空間) + 1次元(時間)に分解する見方
 \Rightarrow 時間と空間の混じり合った重力場の方程式を、時間発展の形式にする)

(0,0) 成分 \Rightarrow (3次元) スカラー

$$h_{00} \equiv -2\Phi \quad (12)$$

(0,i) 成分 \Rightarrow (1次元) ベクトル

$$h_{0i} \equiv W_i \quad (13)$$

(i,j) 成分 \Rightarrow (2次元) テンソル

$$h_{ij} \equiv 2S_{ij} - 2\Phi\delta_{ij} \quad (14)$$

(* i, j, k, l は 1~3)

$$\Phi \equiv -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij} \quad (15)$$

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{2}(h_{ij} - \frac{1}{3}(\delta^{kl}h_{kl})\delta_{ij}) \quad (16)$$

Φ (1成分)
 W_i (3成分)
 Φ (1成分)
 S_{ij} (5成分)

\Rightarrow 10成分

(* Φ は h_{ij} のトレース成分 \Rightarrow スカラー
 S_{ij} は h_{ij} のトレースフリー成分
 (tr $S_{ij} = 0$)

すると、
 $ds^2 = (g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu =$

$$= -(1 + 2\Phi) dt^2 + W_i (dt dx^i + dx^i dt) + [(1 - 2\Phi)\delta_{ij} + 2S_{ij}] dx^i dx^j \quad (17)$$

この計量により Einstein テンソルは (11) より、

$$G_{00} = 2\Delta\Phi + \partial_k \partial_l S^{kl} \quad (18)$$

$$G_{0j} = -\frac{1}{2}\Delta W_j + \frac{1}{2}\partial_j \partial_k W^k + 2\partial_0 \partial_j \Phi + \partial_0 \partial_k S_j^k \quad (19)$$

$$G_{ij} = (\delta_{ij}\Delta - \partial_i \partial_j)(\Phi - \Psi) + \delta_{ij}\partial_0 \partial_k W^k - \partial_0 \partial_{ci} W^c_j + 2\delta_{ij}\partial_0^2 \Phi - \square S_{ij} + 2\partial_k \partial_{ci} S_j^k - \delta_{ij}\partial_k \partial_l S^{kl} \quad (20)$$

ここで、添字 i, j, k, l の上と下は 3次元 Euclid 計量 δ_{ij} で行なう。

• $\Delta \equiv \delta^{ij}\partial_i \partial_j$ (通常 Laplacian)

• $\square \equiv -\partial_0^2 + \Delta$ (D'Alembertian)

• $c\partial_i S_j^k = \frac{1}{2}(\partial_i S_j^k + \partial_j S_i^k)$

(18) 式

$$G_{00} = \frac{1}{2} \left[\partial_k \partial_0 h_{k0} + \partial_0 \partial^k h_{k0} - \square h_{00} - \delta_0^2 h - \eta_{00} \partial_k \partial^k h + \eta_{00} \square h \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\cancel{\partial_0^2 h_{00}} + \partial_i \partial_0 h_{i0} - \partial_0^2 h_{00} + \partial_0 \partial_i h_{i0} + \cancel{\partial_0^2 h_{00}} - \cancel{\nabla^2 h_{00}} - \cancel{\partial_0^2 h} + \partial_k \partial^k h + \cancel{\partial_0^2 h} - \cancel{\nabla^2 h} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cancel{2\partial_0 \partial_i h_{i0}} - \cancel{\partial_0^2 h_{00}} - \cancel{\nabla^2 h_{00}} + \cancel{\partial_0^2 h_{00}} - \cancel{2\partial_0 \partial_i h_{i0}} + \partial_i \partial_j h_{ij} - \cancel{\nabla^2 h} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\nabla^2 h_{00} + \partial_i \partial_j h_{ij} - \nabla^2 h \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\nabla^2 h_{00} + \partial_i \partial_j \{ 2S_{ij} - 2\mathcal{E} \delta_{ij} \} - \nabla^2 [-h_{00} + 6\mathcal{E}] \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[2\partial_i \partial_j S_{ij} - 2\nabla^2 \mathcal{E} + 6\nabla^2 \mathcal{E} \right]$$

$$= 2\nabla^2 \mathcal{E} - \partial_i \partial_j S_{ij}$$

$\left[h_{\mu\nu} = -h_{00} + \delta^{ij} h_{ij} \right]$



ξ^α の選定が自由度を使って Einstein 方程式を扱いやすい形に書く。

transverse + traceless (TT) $\eta^{\mu\nu}$ - ξ^μ

$\partial_i S^{ij} = 0$ (25) (cf. EM の Coulomb gauge $\partial_i A^i = 0$)

$S_{ij}^{NEW} = S_{ij}^{OLD} + \frac{1}{2} \partial_i \xi_j + \frac{1}{2} \partial_j \xi_i - \frac{1}{3} \partial_k \xi^k \cdot \delta_{ij}$ (24)

$\partial_i S_{ij}^{NEW} = \partial_i S_{ij}^{OLD} + \frac{1}{2} \Delta \xi^j + \frac{1}{2} \partial^j (\partial_i \xi^i) - \frac{1}{3} \partial^j (\partial_k \xi^k)$ (26)

$\partial_i S_{ij}^{NEW} = 0$ の条件を課すには。

(25) $\Rightarrow \Delta \xi^j + \frac{1}{3} \partial_j (\partial_k \xi^k) = -2 \partial_i S_{ij}^{OLD}$ (27)

) を解いて ξ^i を求め、(24) ~ (26) を適用すればよい。

尚、(27) は ξ^0 の条件をまだ決めていない \Rightarrow もう一条件を付け加える

$\partial_i W^i = 0$ (28)

$W^i_{NEW} = W^i_{OLD} + \partial_0 \xi^i - \partial^i \xi^0$ (23)

$\partial_j W^j_{NEW} = \partial_j W^j_{OLD} + \partial_0 (\partial_j \xi^j) - \Delta \xi^0$ (29)

また $\partial_j W^j_{NEW} = 0$ の条件は。

(29) $\Rightarrow \Delta \xi^0 = \partial_j W^j_{OLD} + \partial_0 (\partial_j \xi^j)$ (30)

を解いて、 ξ^0 を求め、(27) - (29) に適用することも課せる。

(25) と (28) の $\eta^{\mu\nu}$ - ξ^μ 条件下での Einstein 方程式は

$G_{00} = 2 \Delta \Psi = 8\pi T_{00}$ (31)

$G_{0j} = -\frac{1}{2} \Delta W_j + 2 \partial_0 \partial_j \Psi = 8\pi T_{0j}$ (32)

$G_{ij} = (\delta_{ij} \Delta - \partial_i \partial_j) (\Psi - \bar{\Psi}) = \partial_0 \partial_{(i} W_{j)} + 2 \delta_{ij} \partial_0^2 \Psi - \square S_{ij} = 8\pi T_{ij}$ (33)

16-4 重力波の伝播

ここでは真空で平坦な時空の変動を考慮する。

transverse-traceless (TT) 成分 (25), (28)

真空 $T_{\mu\nu} = 0$

(31) $\Rightarrow \Delta \Psi = 0 \Rightarrow \Psi = 0$ (34) (全空間で正則のとき)

(32) $\Rightarrow \Delta W_i = 0 \Rightarrow W_i = 0$ (35) (")

(33) の トレス成分 $\Rightarrow \Delta \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ (36) (")
(S_{ij} は トレスフリーであることに注意 (16))

(33) の トレスフリー成分 $\Rightarrow \square S_{ij} = 0$ (37)

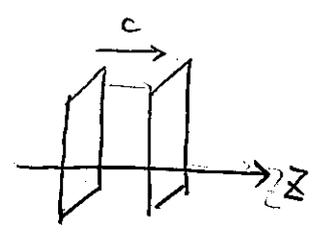
よって S_{ij} : この近似で唯一現れる重力場の成分

transverse-traceless (TT) 成分

(37) は この成分が 光速で伝播する波 として振舞うことを示す。

\Rightarrow 重力波 (gravitational wave)

z 方向に進行する平面波



$S_{ij} = \sigma_{ij} \exp[i(kz - \omega t)]$, σ_{ij} : 定数

(37) $\Rightarrow (-k^2 + \omega^2)\sigma_{ij} = 0 \Rightarrow \omega^2 = k^2$ (位相速度 = 1 (= c))
- (38)

(35) (TT-条件)

$\Rightarrow k \cdot \sigma_{ij} = 0$ (39) $\Rightarrow \sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ (40)

トレスフリー条件 $S^i_i = 0$

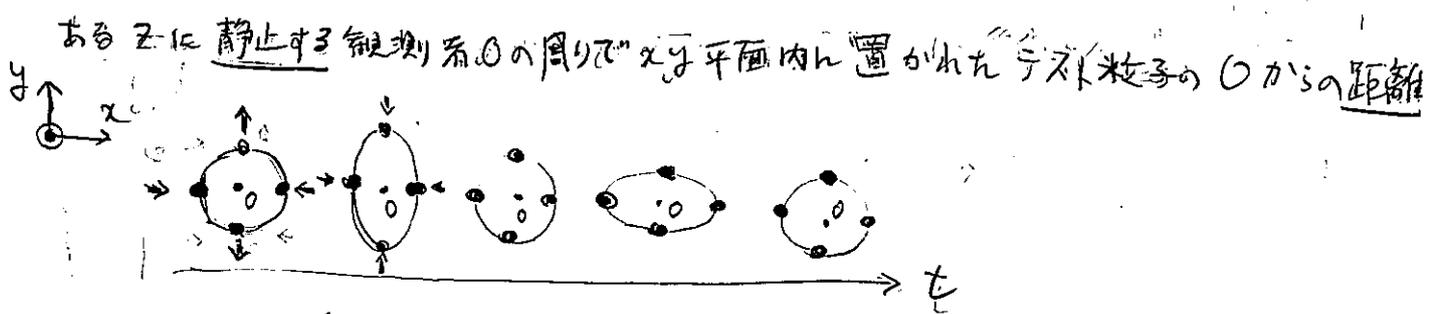
$\Rightarrow \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0$ (41)

(40) (41) の $S_{ij} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ b+bx & b+by & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$

$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \equiv \sigma_x \quad - \text{「(x) E-ト」} \\ \sigma_{xx} = -\sigma_{yy} \equiv \sigma_z \quad - \text{「(+) E-ト」} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{2つの独立な} \\ \text{「偏光」状態} \end{array}$

(+) E-ト を考える。

(42) $ds^2 = -dt^2 + (1 + \sigma_z \exp[i\omega(z-t)]) dx^2 + (1 - \sigma_z \exp[i\omega(z-t)]) dy^2 + dz^2$



※ 重力波の入射しても テスト粒子の座標値 は変化しない

テスト粒子の 4元速度 u^μ

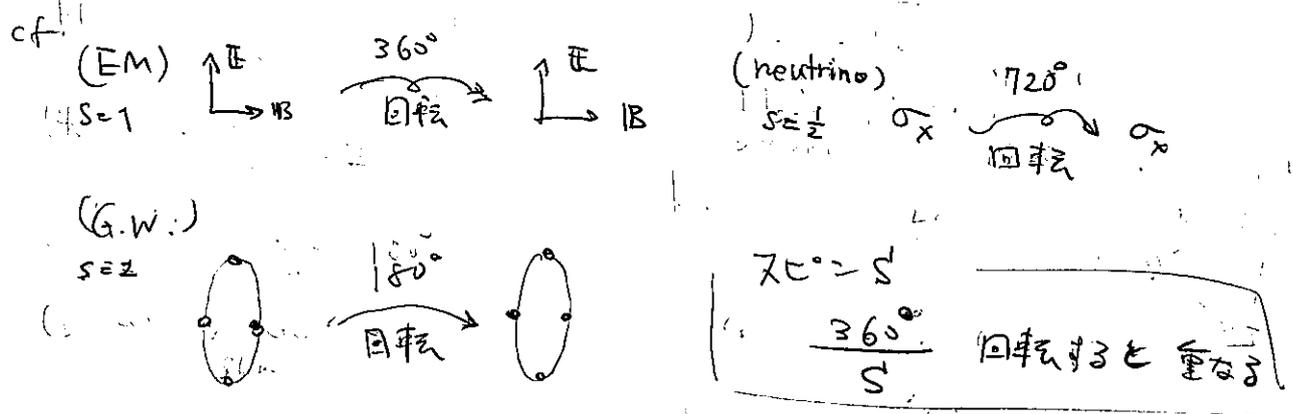
$\frac{d}{d\tau} u^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0$ (測地線)

テスト粒子が $\tau=0$ で静止していたとすると $u^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^\alpha = (1, 0, 0, 0)$

$\frac{d}{d\tau} u^\mu = -\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_t h_{\mu 0} + \partial_t h_{0\nu} - \partial_\nu h_{00})$
 $= 0$

よって $\tau > 0$ でも $u^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^\alpha$, $\frac{du^\alpha}{d\tau} = 0$ となる。

※※ 重力波の量子 (graviton) の spin=2



10-5 重力波の検出

● レーザ干渉計型

a LIGO (USA) :- 2箇所 (Hanford, Livingston) に 腕長 4km の L字型アンテナ

VIRGO (Italy-France) : 3km L字型アンテナ @ Pisa

GEO 600 (German-Britain) : 600m L字型アンテナ @ Hannover

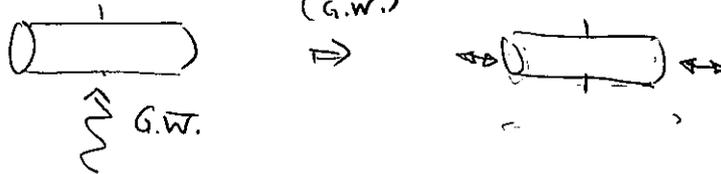
KAGRA (日本) : 3km L字型アンテナ @ 神岡

eLISA (ESA) : 宇宙空間の人工飛行体3機で三角のアンテナ 500万km @ L1点

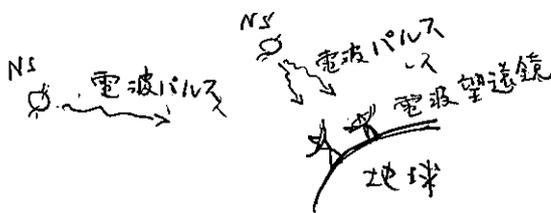
DECIGO (日本) :

● 共鳴型 (バー型) 検出器

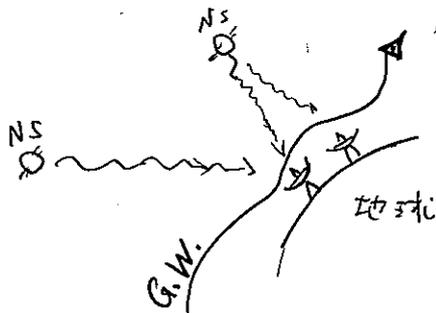
重力波が入射すると強制振動で伸び縮み (G.W.)



● ノルカ-タイミング



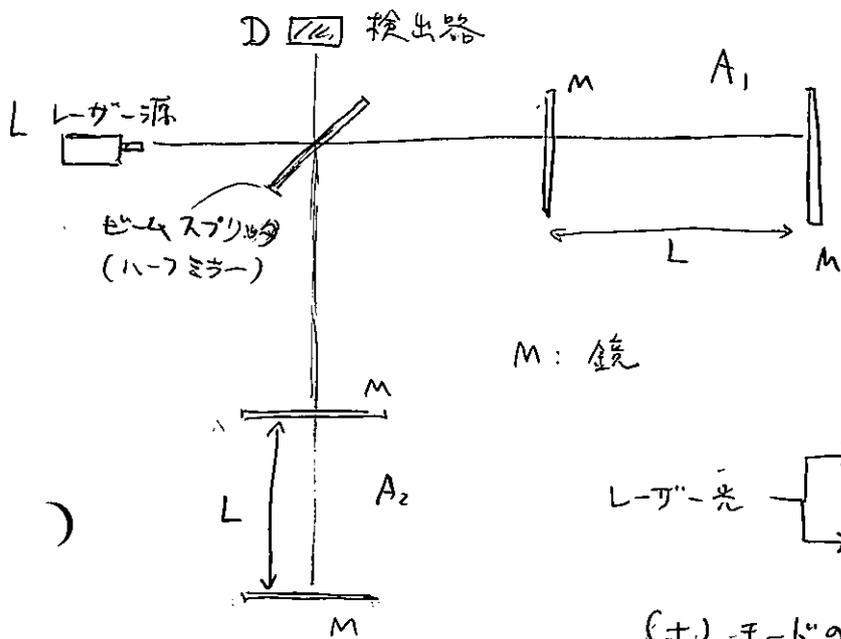
自転周期中性子星 (neutron star, NS) からの非常に規則正しい電波パルス (パルス) をモニターする



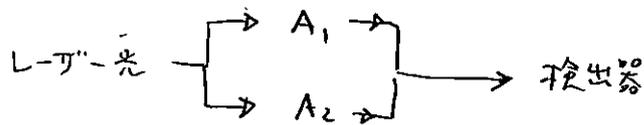
電波望遠鏡でのパルス間隔に変動が生じる

■ レーザ-干渉計型の原理

Michelson interferometer
& Fabry-Pérot cavity



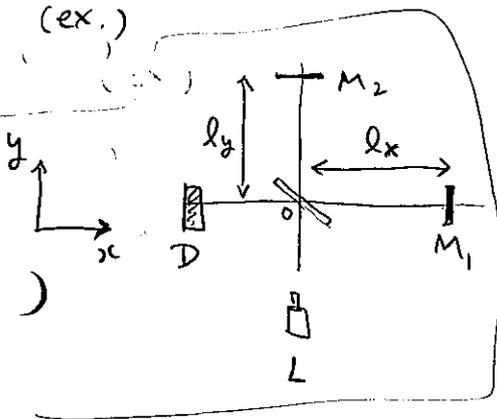
M: 鏡



(+) モードの重力波が入射すると A1, A2 の
光路長が変動

↓
検出器での干渉パターンが変動

(ex.)



レーザー光の波長 λ

$$ds^2 = -dt^2 + (1+h_+)dx^2 + (1-h_+)dy^2 + dz^2$$

Ⓐ x方向のレーザー光の双方向経路

$$ds^2 = 0, \quad dy = dz = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+h_+}}$$

与えられた時刻 T に 0 へ戻ってくる光が
0 へ通る時刻 τ_1 とすると ($\tau_1 < T$)

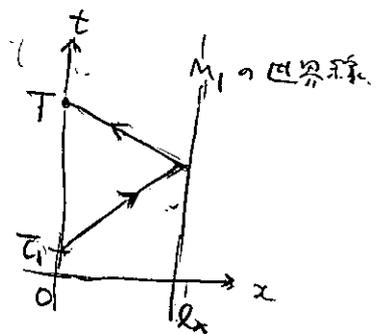
$$\int_{\tau_1}^T \frac{1}{\sqrt{1+h_+}} dt = \frac{2l_x}{c}$$

$$|h_+| \ll 1 \Rightarrow \int_{\tau_1}^T \left(1 - \frac{1}{2}h_+\right) dt = \frac{2l_x}{c}$$

$$\therefore T - \tau_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^T h_+(t) dt = \frac{2l_x}{c}$$

$$\therefore \tau_1 = T - \frac{2l_x}{c} - \frac{1}{2} \int_{T - \frac{2l_x}{c}}^T h_+(t) dt \quad (43)$$

($\because h_+ > 0$ かつ $\tau_1 > T - \frac{2l_x}{c}$)



τ_1 で 0 に λ の光の位相が T で 0 に戻った光の位相となるので (位相は光路に沿って保存)

$$\phi_x(t) = \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot \tau_1 = \frac{2\pi c}{\lambda} \left(T - \frac{2l_x}{c} - \frac{1}{2} \int_{T-2l_x/c}^T h_+(t) dt \right) \quad (44)$$

② y 方向に進んで、時刻 t に 0 に戻った光の位相

$$\phi_y(t) = \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot \left(T - \frac{2l_y}{c} - \frac{1}{2} \int_{T-2l_y/c}^T (-h_+(t)) dt \right)$$

よって、時刻 t での、2つの経路 ($0 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$ と $0 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$) を通った光の位相差は、

$$\Delta\phi = \phi_x(t) - \phi_y(t) = \frac{2\pi}{\lambda} (l_y - l_x) - \Delta\phi_{GR} \quad \text{重力波による位相差}$$

$$(45) \quad \Delta\phi_{GR} \equiv \frac{2\pi c}{\lambda} \int_{T-2L/c}^T h_+(t) dt \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{重力波が無くして} \\ \text{位相差} \end{matrix}$$

($l_x \approx l_y = L$ とした)

10-6 重力波の発生

(10-1) の (11) 式に戻って考える。

Einstein 方程式:

$$(46) \quad \partial_\kappa \partial_\mu h^{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\kappa h^{\kappa\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial_\kappa \partial_\lambda h^{\kappa\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h = 16\pi T_{\mu\nu}$$

"trace-reversed" テンソル $\bar{h}_{\mu\nu}$ と導入

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (47)$$

$$\left(\begin{array}{l} h_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \quad (48) \\ \bar{h} \equiv -h \quad (49) \end{array} \right)$$

すなわち (46) は

$$\begin{aligned} & \partial_\kappa \partial_\mu (\bar{h}^{\kappa\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\kappa\nu} \bar{h}) + \partial_\nu \partial_\kappa (\bar{h}^{\kappa\mu} - \frac{1}{2} \delta^{\kappa\mu} \bar{h}) - \square (\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}) \\ & + \partial_\mu \partial_\nu \bar{h} - \eta_{\mu\nu} \partial_\kappa \partial_\lambda (\bar{h}^{\kappa\lambda} - \frac{1}{2} \eta^{\kappa\lambda} \bar{h}) - \eta_{\mu\nu} \square \bar{h} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (50) \end{aligned}$$

ここで、次のゲージ条件を課す。

$$\partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu = 0 \quad (51) \quad \left(\text{cf. E.M. の Lorenz 条件 } \partial_\alpha A^\alpha = 0 \right)$$

(50) は、 $-\square \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \quad (52)$$

これは、右辺を源泉 (source) とする $\bar{h}_{\mu\nu}$ の非斉次波動方程式。

$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(t, \vec{r})$ \vec{r} : 3次元空間の位置ベクトル

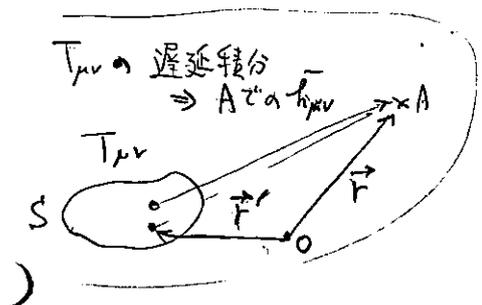
(52) の一般解は、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 4 \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + H_{\mu\nu} \quad (53)$$

$\square H_{\mu\nu} = 0$: 斉次解 (考えている系に外部から伝播してくる重力波)

⑥ 四重極公式

孤立した重力波源 S の外に \exists 観測者 A と仮定 ($H_{\mu\nu} = 0$)



また、 S でのエネルギー、運動量保存は

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (54)$$

(54) の $\mu=0$ 成分は

$$\partial_0 T^{00} + \partial_j T^{0j} = 0 \quad j=1,2,3 \quad (55)$$

$$\partial_0 (55) \Rightarrow \partial_0^2 T^{00} + \partial_0 \partial_j T^{0j} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_0^2 T^{00} = -\partial_j (\partial_0 T^{0j}) \quad (54) \text{ の } \mu=j \text{ 成分: } \partial_0 T^{j0} + \partial_k T^{jk} = 0 \quad ; k=1,2,3$$

$$= -\partial_j \partial_k T^{jk}$$

S の点の空間座標 (Cartesian) $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$

$$(\partial_0^2 T^{00}) x^l x^m = (-\partial_j \partial_k T^{jk}) x^l x^m$$

$$\Downarrow = +\partial_j (x^l \partial_k T^{jk}) x^m - \delta_j^l \partial_k T^{jk} x^m$$

$$\partial_0^2 (T^{00} x^l x^m) = +\partial_j \{ \partial_k (x^l T^{jk}) - \delta_k^l T^{jk} \} x^m + \partial_k T^{lk} x^m$$

$$= +\partial_j \partial_k (x^l T^{jk}) x^m - \partial_j T^{jl} x^m - \partial_k T^{lk} x^m \Rightarrow 2 \cdot \partial_j \partial_k T^{jk} x^m$$

$$\begin{aligned}
 (\text{52}) &= +\partial_j \{ x^m \partial_k (x^l T^{jk}) \} - \delta_j^m \partial_k (x^l T^{jk}) - 2 \partial_j T^{jl} x^m \\
 &= +\partial_j \partial_k (x^m x^l T^{jk}) + \partial_j (\delta_k^m x^l T^{jk}) - \partial_k (x^l T^{mk}) - 2 \partial_j T^{jl} x^m \\
 &= +\partial_j \partial_k (x^m x^l T^{jk}) + \partial_j (x^l T^{jm}) - \partial_k (x^l T^{mk}) + \underbrace{2 \partial_j T^{jl} x^m}_{(-2 \partial_j (T^{jl} x^m) + 2 \delta_j^m T^{jl})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \partial_0^2 (x^l x^m T^{00}) &= +\partial_j \partial_k (x^m x^l T^{jk}) - 2 \partial_j (x^l T^{jm}) \\
 &\quad - 2 \partial_j (x^m T^{jl}) \\
 &\quad + 2 T^{ml} \quad (56)
 \end{aligned}$$

) $\Sigma \subset \Sigma'$ - Σ 内 \vec{r} 原点 O に対し, A は S 及び Σ 十分離れたところにある
 $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|, |\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r}| \equiv r$

$$(53) \Rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4}{r} \int T_{\mu\nu}(t-r, \vec{r}') d^3\vec{r}'$$

$\mu=l, \nu=m$ とする ($l, m = 1 \sim 3$)

$$\bar{h}_{lm} = \frac{4}{r} \int T_{lm}(t-r, \vec{r}') d^3\vec{r}'$$

$$(56) \longrightarrow = \frac{2}{r} \int \partial_0^2 (x_l x_m T^{00}(t-r, \vec{r}')) d^3\vec{r}' + \frac{2}{r} \int \partial_j [B^{jlm}] d^3\vec{r}'$$

\uparrow
 (56) の残りの項

Grass の定理
 表面項 = 0 \Rightarrow

$$= \frac{2}{r} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \int x_l x_m T^{00}(t-r, \vec{r}') d^3\vec{r}'$$

$$\therefore \Sigma \text{ 上 } \bar{I}_{lm} \equiv \int x_l x_m T^{00}(t-r, \vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (57) \quad (\text{エネルギー密度の四重極モーメント})$$

$$\bar{h}_{lm} = \frac{2}{r} \frac{d^2}{dt^2} \bar{I}_{lm} \quad (58)$$

重力波の四重極公式

* $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ 条件 (51) より

$$\begin{aligned}
 \partial_0 \bar{h}^{00} + \partial_k \bar{h}^{k0} &= 0 \\
 \partial_0 \bar{h}^{0j} + \partial_k \bar{h}^{kj} &= 0 \\
 k, j &= 1 \sim 3
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \bar{h}^{ij}$ が (58) で決まると $\bar{h}^{00}, \bar{h}^{0j}$ はこれと解いて求まる \Rightarrow 物理的自由度は 2

Newton力学の成立する弱い重力源では

$$T_{00} \approx \rho \text{ (質量密度)}$$

⇒ I_{lm} は Newton力学の慣性モーメントテンソルに帰着

▷ c, G を復活させる

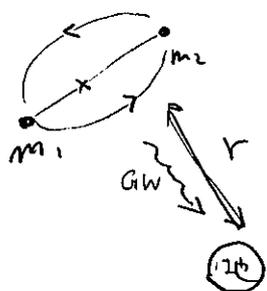
$$\textcircled{59} \quad \bar{h}_{ij} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij} \quad , \quad I_{ij} = \int \rho x_i x_j d^3x$$

ex. $r = 20 \text{ Mpc}$ ($2 \times 10^7 \text{ pc}$; $1 \text{ pc} (10^{-17} \text{ 光年}) \approx 3 \times 10^{16} \text{ m}$) の距離にある銀河団中のブラックホール連星を考へる。

(cf. おとめ座銀河団 (Virgo cluster) までの距離 $\sim 16 \text{ Mpc}$)

ブラックホールの質量を m_1, m_2 とし、連星間距離を a とすると、軌道の角振動数を Ω とする。

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}$$



連星系の慣性モーメントの大きさを I とする。

$$I = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} a \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} a \right)^2$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \quad \text{の程度}$$

よって、地球上での重力波の振幅の大きさを \bar{h} とする。

$$\bar{h} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I} \sim \frac{2G}{c^4 r} \Omega^2 I \sim \frac{2G^2}{c^4 r} \frac{m_1 m_2}{a}$$

$$\sim \frac{2}{ra} \left(\frac{GM_1}{c^2} \right) \cdot \left(\frac{GM_2}{c^2} \right)$$

$$m_1 = m_2 \equiv m \text{ とし } a = 6 \cdot \frac{G(m_1 + m_2)}{c^2} = 12 \cdot \frac{Gm}{c^2} \text{ とすると}$$

$$\bar{h} \sim \frac{1}{6r} \cdot \left(\frac{Gm}{c^2} \right)$$

$$m = 10 M_\odot \quad (M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg} : \text{太陽質量})$$

$$\bar{h} \sim 4 \times 10^{-21}$$

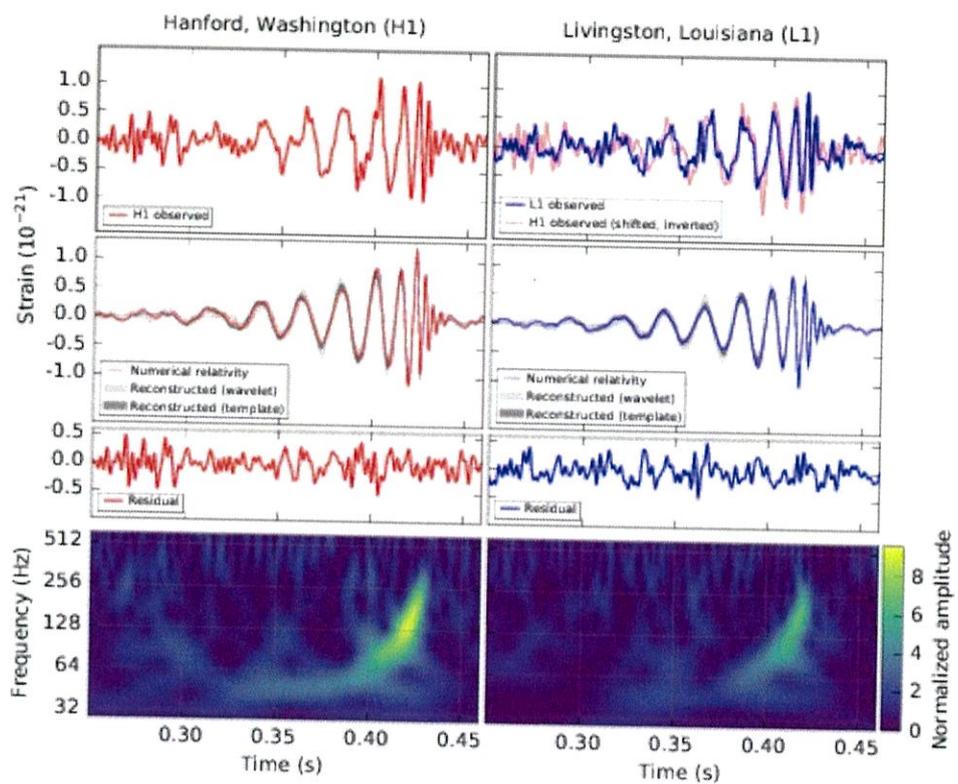
10-7

重力波観測の成功

2015.9.14 : GW150914 (36M_⊙ + 29M_⊙ BH 連星の合体)
@ 410 Mpc

2015.12.26 : GW151226 (14M_⊙ + 8M_⊙ BH 連星の合体)
@ 440 Mpc

(2015.10.12 : LVT151012 (23M_⊙ + 12M_⊙ BH 連星の合体?)



advanced LIGO (253)

GW150914 の観測

(Abbott et al., Phys. Rev. Lett.,
116, 061102 (2016))

▷ GW150914 最初の直接観測

$$\begin{array}{ccccccc}
 36 M_{\odot} & + & 29 M_{\odot} & \longrightarrow & 62 M_{\odot} & + & 3 M_{\odot} \\
 \text{BH} & & \text{BH} & & \text{BH} & & \text{重力波のエネルギー}
 \end{array}$$

(意義)

- 重力波を直接観測できた。
- 一般相対論の正しい検証
- (Kerr) BH の存在の直接的証拠
- BH 連星の存在