

# 宇宙科学実習I：系外惑星の発見 — 視線速度法

今回は Ubuntu で作業してください。

この課題では、連星運動の視線速度を光の吸収線の Doppler 効果によって測る方法を用いて、太陽系外惑星（系外惑星，exoplanet）であるペガスス座 51 番星 b (51 Peg b) の性質を調べます。<sup>1</sup>

## 1 準備：重力二体問題

質量  $m_1$  と質量  $m_2$  の天体が互いに重力で引き合って運動する場合，その相対位置ベクトル  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  は

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (1)$$

を満たします。2つの天体の共通重心から天体 1, 2 へ向かうベクトルを  $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$  とすると， $\vec{\rho}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ ， $\vec{\rho}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$  となるので，相対運動ベクトル  $\vec{r}$  を方程式 (1) の解として求めれば，それぞれの天体の共通重心周りの運動が決定できます。2天体の全質量  $M = m_1 + m_2$  とし， $\vec{r} \equiv (x(t), y(t))$  とすれば，式 (1) は成分  $x(t), y(t)$  の微分方程式

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{r^3}x \quad (2)$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM}{r^3}y \quad (3)$$

となります（運動が拘束される平面を  $xy$  平面に取った。また， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ）。ここで，「 $\dot{\phantom{x}}$ 」は時間微分を表します（ $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ， $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ，etc.）。

問

デカルト座標での運動方程式を極座標  $(r, \theta)$

$$x \equiv r \cos \varphi \quad (4)$$

$$y \equiv r \sin \varphi \quad (5)$$

で書き直すと

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad (6)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad (7)$$

となることを示しなさい

<sup>1</sup>今回の実習の元となった論文は，Mayor, M., Queloz, D., *Nature*, 378, 355 (1995) と，Naef, D. 他, *Astronomy & Astrophysics*, 414, 351 (2004).

## 1.1 面積速度一定の法則＝角運動量保存則

式 (7) を書き直すと

$$(r^2\dot{\varphi})' = 0 \quad (8)$$

となり、 $r^2\dot{\varphi}$  という量 (運動物体の単位質量あたりの角運動量；比角運動量) が時間的に一定である (つまり保存する) ということを表しています。

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \ell \text{ (一定)} \quad (9)$$

あるいは

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = \frac{\ell}{2}\Delta t \quad (10)$$

と書けます。式 (10) を幾何学的に解釈すると、時間  $\Delta t$  の間に、2 天体を結んだ線分が重心の周りに掃く面積は  $\Delta t$  に比例した定数であるといえます (Kepler の第 2 法則；面積速度一定の法則)。

物体の軌道が閉じている場合、軌道の閉曲線を一周する時間としてその運動周期を定義できます。この周期  $P$  は、上の法則から

$$\text{(軌道閉曲線の面積)} = \frac{\ell}{2}P \quad (11)$$

という関係を満たします。

## 1.2 Kepler の第 3 法則

Appendix A. に重力二体問題の解析解を与えました。この解 (34) において  $0 \leq \varepsilon < 1$  のとき軌道は楕円になります。このとき、 $\varepsilon$  は楕円の離心率となっています。いま、楕円軌道の長半径を  $a$  とすると

$$2a = \frac{\ell^2}{GM(1-\varepsilon)} + \frac{\ell^2}{GM(1+\varepsilon)} = \frac{2\ell^2}{GM(1-\varepsilon^2)} \quad (12)$$

となっています。また、短半径を  $b$  とすると  $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$  です。

一方、(10) を楕円軌道の場合に一周期積分すると

$$\oint \frac{1}{2}r^2 d\varphi = \oint \frac{\ell}{2} dt$$

ゆえに  $S = \frac{\ell}{2}P.$  (13)

ここで、 $S$  は楕円の面積、 $P$  は運動の周期です。

楕円の面積  $S$  は長、短半径  $a, b$  を用いて  $S = \pi ab$  と書けることから

$$S = \pi \cdot a \cdot a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \pi a^2 \cdot \frac{1}{a^{1/2}} \frac{\ell}{GM\sqrt{GM}} \quad (14)$$

となります。ここで (12) を使いました。この式と (13) から  $P$  を求めると

$$P = \frac{2}{\ell}S = \frac{2}{\ell}\pi a^{3/2} \frac{\ell}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \quad (15)$$

となります。この式は、「軌道の長半径  $a$  の 3 乗は公転周期  $P$  の 2 乗に比例する」という Kepler の第 3 法則 を表します。天体の公転運動の周期  $P$  と軌道の長半径  $a$  (2 天体間距離の最大値 ~~の半分~~) が分かっているとき、この法則を使うことで、天体の質量の和  $M$  が計算できます。

### 1.3 連星の視線速度

簡単のため、2天体が円軌道を描きながら共通重心の周りを回る場合を考えます(図1)。2星間距離を  $a$  とすると、公転周期はともに  $P = 2\pi/\sqrt{GM/a^3}$  で与えられます(式(15))。地球が(たまたま)公転軌道面上にあり、かつ2星の重心に対して静止しているとする、星1が地球に対してもつ速度は  $\pm \frac{m_2 a}{M} \frac{2\pi}{P}$  の間で周期的に変化します。このとき星2の速度は星1とは逆位相になり、 $\mp \frac{m_1 a}{M} \frac{2\pi}{P}$  の間で同じ周期で変化します。どちらかの星の視線速度が観測できれば、これと周期の情報を使って連星間距離  $a$  と質量比  $m_2/m_1$  がわかります。

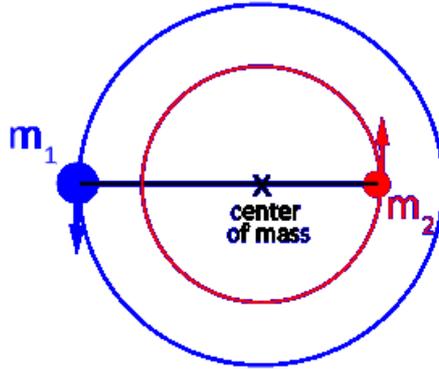


図1: 円軌道を描く連星系を軌道面に垂直な方向から見た図。2星は共通重心の周りを同じ周期で円軌道を描いてまわっている。その周期は  $P = 2\pi/\sqrt{GM/a^3}$ ;  $a$  は2星間の距離。

## 2 準備: 原子の線スペクトルと光の Doppler 効果

### 2.1 水素原子のエネルギー準位と線スペクトル

ここでは簡単のために水素原子の構造を考えます。中性水素原子は陽子の周りに1個の電子が束縛された状態の原子です。<sup>2</sup>このような原子の構造は量子力学で記述されていて、束縛された電子の状態は非連続的な整数(量子数)で指定される非連続のエネルギー状態を取ります。量子数  $n$  で指定される状態のエネルギーは

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \quad (16)$$

となります。ここで、 $e = -1.602177 \times 10^{-19} \text{C}$  (電子の素電荷)、 $m = 9.109383 \times 10^{-31} \text{kg}$  (電子質量)、 $h = 6.626070 \times 10^{-34} \text{Js}$  (Planck 定数)、 $\epsilon_0 = 8.854188 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{Jm}$  (真空の誘電率)です。異なる  $n$  の値で指定される電子のエネルギー状態(準位)間を電子が遷移するとき、このエネルギー差に相当する光子が原子から放出(遷移後のエネルギーが遷移前より低い場合)または吸収(遷移後のエネルギーが高い場合)されます。

光子のエネルギー  $E$  と振動数  $\nu$  の間には  $E = h\nu$  の関係式が成り立つので、量子数  $n$  の状態から  $n'$  の状態に遷移した水素原子から放出される光子の波長  $\lambda$  は

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_n - E_{n'}}{hc} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left( \frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (17)$$

<sup>2</sup>簡単のため、原子番号が1で質量数が1より大きい原子(同位体)は無視します。

と書けます。右辺の括弧の前の係数は Rydberg(リュードベリ) 定数と呼ばれます。ここで、 $c$  は真空中の光速  $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{m/s}$  です。

問

Rydberg 定数  $Ry$  を計算しなさい。

とくに、 $n'$  を固定したときに、 $n$  が異なる遷移の集合として "系列" が定義されています。 $n' = 1$  の場合を Lyman 系列、 $n' = 2$  を Balmer 系列、 $n' = 3$  を Paschen 系列、 $n' = 4$  を Brackett 系列と呼びます。Lyman 系列は紫外光、Balmer 系列は主に可視光、Paschen, Brackett 系列は赤外光の領域にあります。

問

Lyman 系列の遷移によって放射される光子が紫外光の波長領域 ( $100 - 4000 \text{\AA}$ ) に当たることを示しなさい。ただし  $1 \text{\AA}(\text{オングストローム}) = 10^{-10} \text{m}$  です。また、Balmer 系列の長波長側 4 つの波長を求めなさい。

上の Balmer 系列で、長波長側から数えて 4 つの波長は可視光の領域 ( $4000 - 8000 \text{\AA}$ ) にあります。これらは順に  $H\alpha$ ,  $H\beta$ ,  $H\gamma$ ,  $H\delta$  と名付けられています。

## 2.2 吸収線, 輝線

恒星からの光をプリズムや回折格子に通すと、光の波長成分を分解して観測することができます。星からの光は、大まかにはその星の表面温度で決まる黒体放射に近いエネルギー分布をしていますが、そこに存在する物質の物理状態に対応した線スペクトルがたくさん重なって見えています (例えば第3回プリントのヴェガのスペクトル図参照)。図2のように、光源と観測者の間にガスを置いた場合を考えます。ガスが光源よりも弱い光を発光する場合 (例えば、ガスの温度が光源より低い場合)、ガス中の物質の特徴的な線スペクトルで吸収を受けて、暗線が見えるようになります (吸収線)。一方、光源を外してガスを直接観測すると、物質の特徴的な線スペクトルが明るく輝く線として見えます (輝線)。恒星の場合、その光は光球面 (物質の光学的厚みのためにそれ以上は見通せないような面) から出て、その上にある薄い恒星大気 (温度が光球面より低い) を通って観測者に到達します。そのため、この恒星大気の吸収線が見えます。<sup>3</sup>

一般に恒星からの吸収線の波長は、次の節で扱う Doppler 効果によって実験室で測られる波長からずれます。このズレは、吸収体であるガスの視線方向の運動の情報を含んでいます。

## 2.3 Doppler 効果と赤方/青方偏移

光源が観測者に対して運動している場合、光源で測った光の波長と観測者が測った波長には違いが現れます。これは音波と同様の Doppler 効果が光の場合にも起きている事で説明できます。両者が相対的に運動していない場合 (静止系) の光の波長を  $\lambda_e$  とします。この状態から光源が観測者から速度  $v$  で遠ざかる場合 (近づく場合は負の値をとるものとする)、観測者が観測する波長  $\lambda_o$  は

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_o} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (18)$$

となります (この式は特殊相対論的に正しい式です)。 $|v| \ll c$  のとき、上の式は

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = 1 + \frac{v}{c} \quad (19)$$

<sup>3</sup>恒星では通常吸収線しか見えませんが、例えば Be 星という星では輝線も観測されています。一方、薄いガスでできた惑星状星雲にはたくさんの輝線スペクトルが見えます。

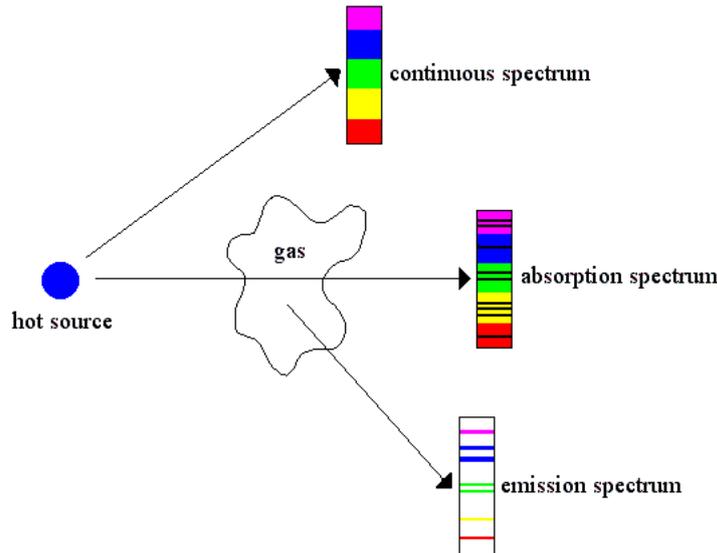


図 2: 吸収線, 輝線の形成. 高温の光源 (hot source) からの光は連続スペクトルであるとする. この光をプリズムあるいは回折格子を通して観測することを考える. 低温のガス越しに観測すると, ガス中の原子・イオン・分子に特徴的な線スペクトルの波長の光が吸収されて, 吸収線 (暗線) として見える (absorption spectrum). 一方, ガスそのものを見ると, そのガスそのものが放射する特徴的な線スペクトルが輝線として見える (emission spectrum).

と近似できます.

$v$  が正のとき, 観測者が見る光の波長は光源での波長よりも伸びています. 波長の長い光は赤っぽく見えるので, これを赤方偏移 (redshift) といいます. 逆に近づく光源の場合は波長が短くなり, 青っぽく見えるので青方偏移 (blueshift) といいます. この波長の変化の様子を定量化するため, 赤方偏移 (因子)  $z$  が

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (20)$$

と導入されます.

固有の波長が予め分かっている光 (上記の水素原子の Balmer 系列など) について, その波長を測ること (つまり  $z$  を測ること) によって, 光源が観測者に対してもつ視線速度 (どれくらいの速さで近づいているか, あるいは遠ざかっている) を決めることができます.<sup>4</sup>

### 3 連星運動の Doppler 効果 : G 型主系列星 HD75767

hd75767.zip をダウンロードして展開します. spectr1.dat から spectr11.dat は, 恒星 HD75767 のスペクトルの 5800Å から 5900Å 程度の波長範囲のデータです. 第一列は波長, 第二列はフラックスです. この HD75767 は連星系に属する星ですが, それは吸収線の Doppler 効果でその運動が確認できることから判明しています (分光学的連星, spectroscopic binary).

これらデータは別々の日に測定されたスペクトルで, spectr1.dat を 0day とした経過時間 (days) はファイルの 1 行目に記載されています. 各日のスペクトルにはたくさんの吸収線が見えていますが, このうち最も深い 2 本の線は Na(ナトリウム) の D 線と呼ばれる吸収線です (図 3). D 線は近接する 2 つの線スペクト

<sup>4</sup>この, Doppler 効果による視線速度の決定は光源までの距離とは独立に決まることに注意.

ルで、太陽のような G 型星でも強く見られます。<sup>5</sup> D 線の波長は、静止系（実験室系）で  $\lambda_{D1} = 5889.950\text{\AA}$ ,  $\lambda_{D2} = 5895.924\text{\AA}$  ということが分かっています。

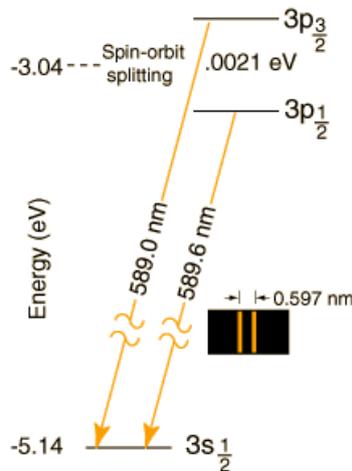


図 3: D 線を生じる Na 原子のエネルギー準位. Na 原子の最外殻電子が、エネルギーの高い 3p 軌道と 3s 軌道間を遷移するとき D 線が生じる. 3p 軌道は電子のスピンに応じてさらに準位が分裂している（全角運動量  $\frac{3}{2}$  状態がエネルギー的に高い）. この 2 つの 3p 軌道から 3s 軌道の遷移によって 2 重の D 線が生じる (<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/sodzee.html>).

課題：Na D 線による視線速度の時間変化

データのプロットから 2 本の D 線の波長を読み取り、経過時間に対する波長の変化の表をつくりなさい。この表と、静止系での D 線の波長からこの星の視線速度 (km/s) を計算し、横軸を時間、縦軸を視線速度としてプロットしなさい (Doppler 効果の式は  $|v| \ll c$  の場合のものを使えば十分です)。

この課題では、各 D 線の中心波長を求める必要があります。ここでは一番粗い方法として、データ中の D 線の谷底の波長を読み取ってください。<sup>6</sup>



図 4: HD75767 のスペクトル. spectr1.dat に対応. 右に行くほど波長が長い. 最も濃い 2 線が Na D 線.

## 4 系外惑星 51 Peg b

51 Pegasi (51 Peg ; ペガサス座 51 番星 ; 別名 Helvetios <sup>7</sup>) は、ペガサス座にある太陽に非常に似た恒星 (スペクトル G 型) ですが、線スペクトルの Doppler 偏移の観測から、この恒星は木星程度の大きさの

<sup>5</sup> 高速道路のトンネル等で黄色いランプの照明が見られますが、それらは Na の D 線の光を使っています。

<sup>6</sup> もう少し洗練された方法は、吸収線の谷の周りのデータを切り出して、それを適当な関数でフィットすることです (例えば放物線)。

<sup>7</sup> 国際天文学連合 (IAU) で認定された名称です。この他の名前をついた系外惑星系 (exoworlds) は <http://nameexoworlds.iau.org/names> に掲載されています。

惑星 (51 Peg b ; 別名 Dimidium) を伴っていることがわかりました。51Peg b は太陽系外で初めて発見された惑星となり、これ以降現在までに太陽系外惑星は 4000 以上発見されています。<sup>8</sup>系外惑星の搜索は、「惑星系の起源」「第二の地球探し」「地球外生命探査」など、地球惑星科学、生命科学とも関連した重要な研究領域へと発展しています。

ここでは、51 Peg (惑星ではなく、主星の方) の観測データから 51 Peg b の質量と軌道の大きさを導いてみましょう。

レポート課題：太陽系外惑星 51 Peg b

1. 主星 51 Peg の U,B,V 等級はそれぞれ  $U = 6.39$ ,  $B = 6.16$ ,  $V = 5.46$  です。<sup>a</sup> 以前に使った主系列星のデータファイル EEM\_MS.dat を参照してこの値に近い色指数をもつ主系列星を探しなさい。すると、この星の質量は太陽質量の何倍と推定されますか。ただし、星間吸収は無いものとします。(51 Peg はその測光とスペクトル観測から G 型の主系列星であることが分かっています。<sup>b</sup>)

ダウンロードした 51Peg.dat というファイル<sup>c</sup>には、観測時刻と、吸収線の Doppler 効果から求めた恒星の視線速度 (単位は km/s) が記されています (第一列は時刻<sup>d</sup>, 第二列は視線速度 (km/s), 第三列は速度の不定性です.)。

2. データを用いて、51Peg 系の重心の視線速度を決めなさい。
3. 51Peg 系の公転周期は何日でしょうか。
4. 横軸を 1 周期の位相 ( $0 \leq \varphi \leq 1$ ) とし、縦軸を重心の速度を除いた正味の視線速度としてプロットしなさい。
5. グラフからおおよその公転速度 ( $\text{ms}^{-1}$ ) を読み取りなさい。
6. 以下では 51 Peg 系の軌道の離心率  $e$  はほぼ 0 に近い (軌道は円に近い) こと、また軌道傾斜角  $i$  はほぼ 90 度 (我々は軌道運動をほぼ真横から見ている) を既知とします<sup>e</sup>。上の考察から、51 Peg の質量  $M_1$ , 軌道周期  $P$ , 軌道運動の速度  $V_r$  は既知量とします。このとき、51Peg の伴星と主星の質量の比  $\varepsilon$  および主星-伴星間距離  $D$  を求める式を立てなさい。この式を解いて  $\varepsilon$  と  $D$  を求めなさい。伴星の質量は木星の質量 (太陽質量のおよそ 1000 分の 1) の何倍ですか。また主星-伴星間距離は何天文単位ですか。

<ヒント> 立てるべき式は、Kepler の第三法則の式、視線速度を軌道角速度で表す式です。また、解く際には  $\varepsilon$  が 1 に比べて十分小さい量であることを仮定しましょう。

7. 以前に、太陽光を受けて黒体放射する地球のモデルを考えてその平衡温度を求めました。51 Peg b の温度を同様に求めると何 K になるでしょうか。ただし、主星 51 Peg の光度は太陽のそれと同じとし ( $L_{\odot} = 3.84 \times 10^{26} \text{W}$ ), アルベドは 0 とします。<sup>f</sup>

<sup>a</sup> SIMBAD による (<http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-basic?Ident=51+Pegasi>)

<sup>b</sup> これには異論もあって、G 型の準巨星 (subgiant) という可能性も指摘されています。

<sup>c</sup> "Naef, D. et al, *Astronomy & Astrophysics*, Vol.414, 351-359 (2004)" からのデータです。

<sup>d</sup> 太陽系の重心で測ったユリウス日. barycentric Julian day (BJD)

<sup>e</sup> 実際に行われている研究では、これらの値も未知数として決定あるいは推定します。

<sup>f</sup> ちなみに、太陽から平均距離 5AU にある木星の表面温度は 150K 程度です。

<sup>8</sup>系外惑星について、より詳しくは”井田茂・小久保英一郎「一億個の地球-星くずからの誕生」(岩波科学ライブラリー)”, ”田村元秀「第二の地球を探せ!」太陽系外惑星天文学入門」(光文社新書)”, ”井田茂「系外惑星」(東京大学出版会)”, ”河原創「系外惑星探査-地球外生命をめざして-」(東京大学出版会)”などを読んでください。

## A 点状重力源についての，テスト粒子の運動の解析解

基礎方程式は

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{r^2} \quad (21)$$

$$r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (22)$$

をとる．

2番目の方程式に  $r$  を掛けると

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \quad (23)$$

となるので，括弧の中身は定数となる．この定数を  $\ell$  とおく．

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \ell \quad (24)$$

この定数は「単位質量あたりの角運動量」(比角運動量) になっている．

ここで，関数  $u$  を  $u = \frac{1}{r}$  と定義すると

$$\frac{d\varphi}{dt} = \ell u^2 \quad (25)$$

である．以下， $u$  を  $\varphi$  の関数として，基礎方程式の最初のを  $u$  の微分方程式に書き直すことを考える．

まず，

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{dt}{d\varphi} \cdot \frac{du}{dt} = \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^{-1} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} = \frac{1}{\ell u^2} \left( -\frac{dr}{r^2} \right) = \frac{1}{\ell u^2} \left( -u^2 \frac{dr}{dt} \right) = -\frac{dr}{dt} \quad (26)$$

より，

$$\frac{dr}{dt} = -\ell \frac{du}{d\varphi} \quad (27)$$

これをもう一度  $t$  で微分して

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{d\varphi} \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( -\ell \frac{du}{d\varphi} \right) = \ell u^2 \cdot (-\ell) \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -\ell^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \quad (28)$$

よって，動径方向の運動方程式を書き直すと

$$-\ell^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{1}{u} (\ell u^2)^2 = -u^2 \quad (29)$$

これを整理して

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -u + \frac{GM}{\ell^2} \quad (30)$$

となる．式 (30) は  $Y = u - \frac{GM}{\ell^2}$  という関数を導入すると

$$\frac{d^2 Y}{d\varphi^2} = -Y \quad (31)$$

という簡単な方程式になる．これは単振動の微分方程式であるので，その一般解は

$$Y = A \cos(\varphi + \alpha) \quad (32)$$

と書ける．ここで  $A, \alpha$  は積分定数である．このとき

$$u = \frac{GM}{\ell^2} + A \cos(\varphi + \alpha) \quad (33)$$

である。この式を  $r$  についての式に直す前に積分定数を変換して  $\varepsilon = \frac{\ell^2}{GM} A$  となる定数  $\varepsilon$  を  $A$  の代わりに導入しておく。このとき

$$r(\varphi) = \frac{\frac{\ell^2}{GM}}{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \alpha)} \quad (34)$$

が、動径  $r$  を  $\varphi$  の関数と見たときの軌道運動の解である。

これは原点を焦点とする離心率  $\varepsilon$  の二次曲線 ( $0 \leq \varepsilon < 1$  のとき楕円 ( $\varepsilon = 1$  のときは円軌道),  $\varepsilon = 1$  のとき放物線,  $\varepsilon > 1$  のとき双曲線となる) である。ニュートンの重力で質点を重力源とする場合のテスト粒子の運動は重力源の質点を焦点に置いたときの二次曲線を描くことが分かった。