宇宙科学実習 I：GW150914 -ブラックホール連星からの重力波観測

今回は，2015 年 9 月 14 日 9 時 50 分 45 秒（協定世界時, UTC[1]）に初めて観測された重力波イベント GW150914 について考えましょう．[1]

1　重力波とは

Einstein の一般相対論 (general relativity) においては．重力は時空間が歪むことと同じであるとされます．この理論において時空間は物理現象の起きる舞台であるだけでなく，それ自体が運動の自由度を持つ物理的な実体（場）として記述されます．数学的な時空間の歪みの表現は，時空を記述する幾何学的量である「曲率」として実現されます．この曲率の値が大きいほど物体の重力が強い，といえます．また，この歪みは時間とともに変動でき，小さな振幅の歪みは時空間を波として伝播することが一般相対論から帰結されます．この波は光速で伝わり，**重力波 (gravitational wave)** と呼ばれます.[2]

重力の強さが一般相対論的である[3] 天体が光速に近い加速運動をすると，強い重力波が発生します．電磁気学においては，荷電粒子が加速運動すると電磁波が放射されますが，これと同様のことが重力でも起きるわけです．ただ，重力波は物体との相互作用が非常に弱いため，電磁波ほどその観測が容易ではありません．

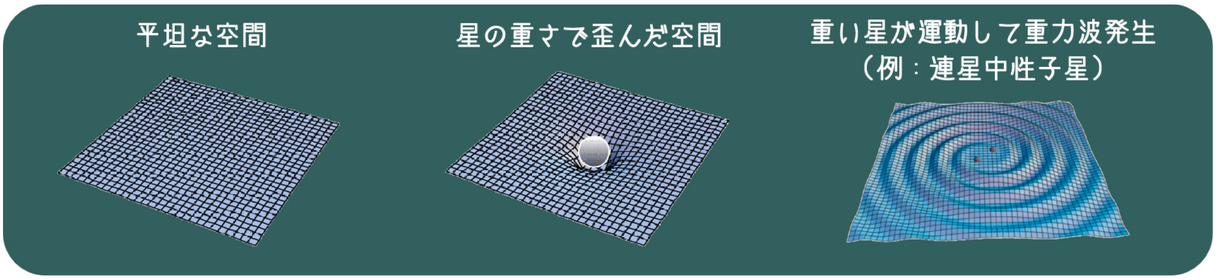

図 1: 時空間を二次元面のように描くと，天体が存在することでその周囲の時空間は曲がります（曲率が 0 でなくなる）．この天体が運動すると面の振動が重力波として伝わっていきます．（図は東京大学宇宙線研究所 KAGRA ウェブページから）

[1]日本標準時 (JST) は UTC より 9 時間早い.

[2]重力波についての易しい解説は [2] などを参照してください.

[3]質量 M の天体の重力半径は $\frac{GM}{c^2}$ と定義されますが（$G = 6.674 \times 10^{-11}$ $\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$, $c = 2.99792458 \times 10^8$ $\mathrm{ms^{-1}}$），これと天体の半径 R との比，$\frac{GM}{c^2R}$ という無次元量が天体の重力の強さを表します．この値は太陽では 2×10^{-6}，中性子星では $0.1 - 0.2$ 程度，ブラックホールでは 0.5 となります．この値が大きいほど天体の重力における一般相対論的効果が無視できなくなります.

2　重力波の観測: レーザー干渉計型検出器

重力波がどれくらい観測しにくいかをみてみましょう．重力波は時空間の歪みの変動なので，空間の２点の間の距離の変動を計測することで，重力波を観測することができます．この距離の変動の割合は，GW150914 でも最大 10^{-21} の程度でした．

問

重力波による相対的な距離の変動 h が $h = 10^{-21}$ であったとします．重力波入射以前には $L = 4\text{km}$ の距離があった２点間の距離は，この重力波入射によってどのくらい揺らぐか計算しなさい．距離の揺らぎは陽子半径（$8.8 \times 10^{-16}\text{m}$）の何倍でしょうか．

地上にある実験機器のサイズを考えると，重力波による距離の揺らぎは核子よりも小さいレベルです．これほど小さい変動を，地面や検出器そのものの振動などの雑音（ノイズ）から分離して観測するのは非常に難しい実験です．検出が困難を極める重力波を観測するための努力が過去４０年あまりに渡って続けられて来ました．近年では**レーザー干渉計**の技術の飛躍的発展などによって観測可能限界精度が高まっていき，2015 年に重力波の検出に成功したわけです．

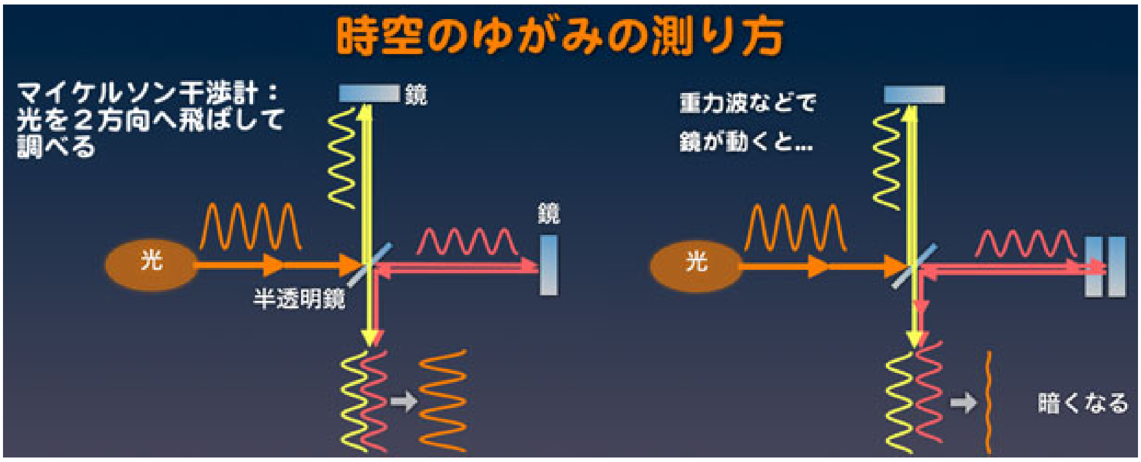

図 2: レーザー干渉計型重力波検出器の原理．左から入射したレーザー光が中央の半透明鏡（ビームスプリッタ）で互いに直行する方向に分割される．レーザー光の向かう方向には鏡があり，そこで光が反射されて半透明鏡に戻ってくる．戻って来た光は，光路差に応じた干渉を受けて，強め合う（波の山と山，谷と谷が合成される）か，あるいは弱め合う（波の山と谷が合成されて打ち消しあう）．重力波がこの紙面に垂直に入って来ると，半透明鏡と反射鏡の光路差が重力波の振動数で変動し，明暗が変動する．この明暗の変動を観測することで重力波が検出できる．アメリカの LIGO, イタリア＝フランスの VIRGO, 日本の KAGRA は基本的にこの原理を用いた検出器である．(図は大阪市立大学神田研究室ウェブページから)

現在稼働中あるいは準備中のレーザー干渉計型重力波検出器は，世界に４台あります．このうち２台はアメリカの LIGO(Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) で，ワシントン州の Hanford とルイジアナ州の Livingston にあります．これは L 字型構造をしたレーザー干渉計で，腕の長さが 4km あります．重力波がこの構造を通り過ぎると，一方の腕の長さが伸びるときは他方の腕の長さは縮みます．このため，レーザー干渉パターンが変動して重力波の検出が可能となります（図 2）．イタリア，Pisa の郊外には LIGO と同規模のイタリア＝フランスの共同研究施設として VIRGO，日本の神岡鉱山（岐阜県）にはやは

り同規模の KAGRA[3] が準備中です．

図 3: 世界のレーザー干渉計型重力波検出器 (2015 年現在)．東京大学宇宙線研究所 Web ページより．

3 連星系からの重力波

地上で観測される重力波の源として最も可能性が高いと思われている（た）のは，ブラックホールや中性子星からなる連星系です．

連星系のエネルギー，角運動量

質量 m_1, m_2 の星からなり，連星間距離 R の連星系を考えます．簡単のため，連星は円軌道を描くとします．この系の角速度（角振動数）Ω，全力学的エネルギー E，全角運動量 J は次のようになります．

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \tag{1}$$

$$E = -\frac{G\mu M}{2R} \tag{2}$$

$$J = \mu\sqrt{GMR} \tag{3}$$

ただし，$M = m_1 + m_2$ (全質量)，$\mu = m_1 m_2 / M$ （換算質量）である．

これから次のことがわかります．質量（μ，M）を保存しつつ連星系からエネルギーを取り去った場合 ($\Delta E < 0$)，軌道半径 R は縮み（$\Delta R < 0$），一方で軌道運動の角振動数 Ω は増加します ($\Delta\Omega > 0$)．

重力波はエネルギーや角運動量を運ぶので，連星系から重力波が放射されると系のエネルギー，角運動量は減少します．このとき連星軌道は収縮し，軌道運動の角振動数は増加します．**連星系から放射される重力波の振動数 f_{GW} は，軌道運動の振動数 $f_{orb} = \frac{\Omega}{2\pi}$ のちょうど 2 倍になります．**[4] そのため，連星系が放射

[4]連星系から放射される重力波は，質量分布の四重極モーメント（重力波源の点 x_i $(i = 1, 2, 3)$ における密度分布を ρ とすると，モーメントは $I_{ij} = \int \rho x_i x_j dV$ (i,j=1,2,3)）に依存するので，軌道の半周期ごとに重力波の位相が元に戻ります．このため，連星系からの重力波の振動数は，軌道運動の振動数の 2 倍になっています．

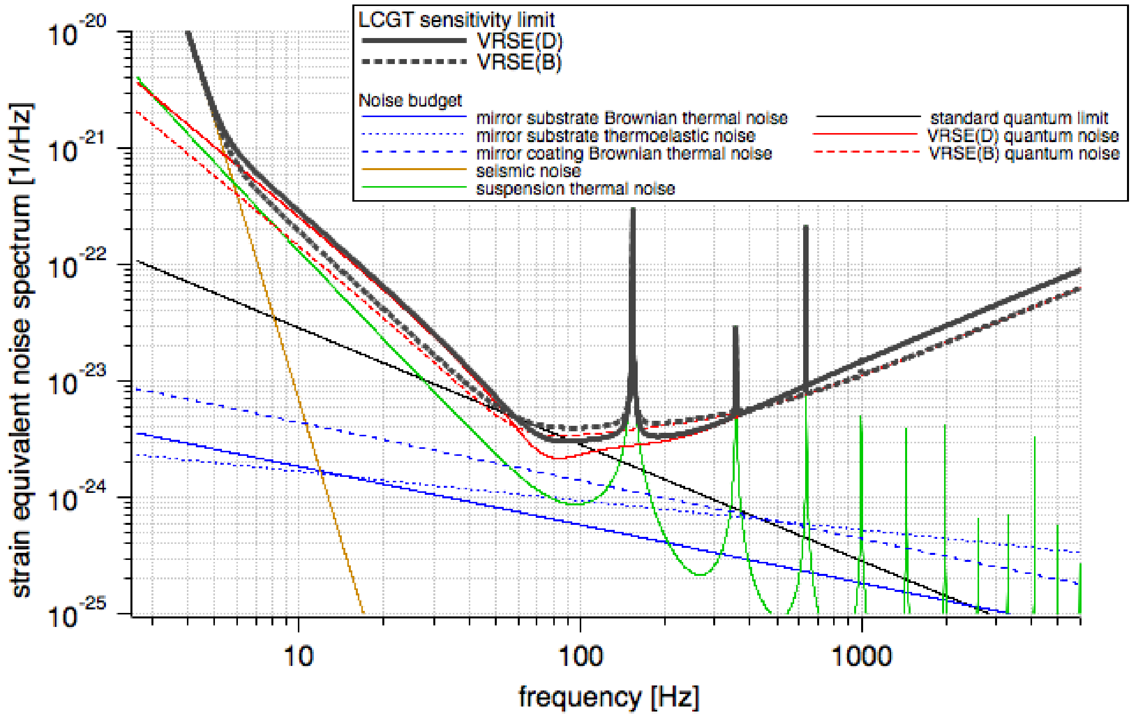

図 4: . KAGRA の雑音曲線（noise curve）．横軸は重力波の振動数，縦軸は重力波の振幅 h．黒い実線よりも上側の領域に重力波信号があれば観測できる．東京大学宇宙線研究所 Web ページより．

する重力波の振動数は時間とともに増大していきます．[5]

一般相対論によれば，重力波放射によって収縮しつつある連星系から放射される重力波の振動数は

$$\frac{df_{GW}}{dt} = \frac{96\pi^{\frac{8}{3}}}{5}\frac{G^{\frac{5}{3}}}{c^5} f_{GW}^{\frac{11}{3}} m_1 m_2 M^{-\frac{1}{3}} \tag{4}$$

に従って時間変化します．[4]

4　GW150914

アメリカの LIGO は，2002 年に観測を開始して以来 10 年以上重力波を検出できませんでした．その間，感度をあげる改修が 2 度あり，２度目の改修ののち，2015 年 9 月から advanced LIGO として運用を開始しました．その直後，2015 年 9 月 14 日（UTC）に，400Mpc の距離にあるブラックホール連星の合体からと思われる重力波を捉えることに成功しました．

ここでは GW150914 の重力波波形データから，重力波源の連星の性質について考えます．

4.1　チャープ質量

連星は合体直前に急激に軌道半径が減少し，その結果重力波の振動数は急激に増大します（チャープ波形）．合体時刻を t_c として，そのときの振動数が無限大になるという簡単化を行うと，式（4）は次のよう

[5] 時間とともに増大する振動数をもつ信号は chirp（チャープ）信号（chirp=「キーキーと鳴く」）と呼ばれます．GW150914 の信号は音に変換されていて，`http://www.soundsofspacetime.org/detection.html` で聴くことができます．

に簡単に積分できます．

$$f_{GW}^{-\frac{8}{3}}(t) = \frac{(8\pi)^{\frac{8}{3}}}{5}\left(\frac{G\mathcal{M}_{ch}}{c^3}\right)^{\frac{5}{3}}(t_c - t) \tag{5}$$

ここで $\mathcal{M}_{ch}$ は

$$\mathcal{M}_{ch} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{M^{\frac{1}{5}}} \tag{6}$$

で定義される質量の次元を持つ量で，連星の**チャープ質量**（chirp mass）と呼ばれます．

4.2 データ

`numrel-H.dat`，`numrel-L.dat` は，それぞれ LIGO の Hanford，Livingston それぞれの干渉計で観測された GW150914 の h の時間変動の観測データを良く再現する，一般相対論的コンピュータシミュレーションの結果です．[5]

データの構成は，一列目が秒単位の時刻（09:50:45 UTC を 0 とする），二列目が重力波の振幅 h（10^{-21} 単位）です．

4.3 課題

1. まず，Hanford のデータを扱います．`numrel-H.dat` を時間を横軸，h を縦軸として `gnuplot` でプロットします．
2. 振幅 h 最大の時点が連星が合体したときです．この時間 t_c を読み取ります．
3. t_c より小さい t で，振幅のゼロ点の時刻を測って記録していきます．10 点程度とれば十分でしょう．
4. 小さい方から i 番目のゼロ点を t_i とします．$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$，$\tau_i = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$ とすると，τ_i での近似的な振動数 $f_{GW}(\tau_i)$ は，$f_{GW}(\tau_i) = 1/(2\Delta t_i)$ と定義できます．τ_i, $f_{GW}(\tau_i)$ を計算してデータファイルを作ります．
5. 振動数のデータを `gnuplot` で最小 2 乗フィッティングします．フィットする関数形は式 (5) の形：

$$f_{GW}^{-8/3} = A(t_c - t) \tag{7}$$

   とし，定数 A を求めます．
6. $\mathcal{M}_{ch}$ を計算します（単位：太陽質量 $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$kg.）．

上の手順を Livingston のデータでも繰り返します．

4.4 補遺：gnuplot によるデータの最小 2 乗フィッティング

観測や実験で 2 種の量 X，Y について N 組のデータが得られたとします（$(x_i, y_i)\ ; i = 1 \sim N$），X，Y に関数関係 $Y = f(X)$ があるとして，この関係を求める問題を考えます．より具体的には，関数 f がいくつかの未定パラメータによって表される単純な関数（例：$f(x) = Ax + B$ として，A, B が未定パラメータ）の場合を考えます．このとき，

$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{(f(x_i) - y_i)^2}{\sigma_i^2} \tag{8}$$

を最小にするようにパラメータの組を決定する方法を最小２乗法といいます (図 5)．ここで，σ_i^2 はデータ y_i の不定性で，一般には i により異なりますが，観測あるいは実験の不定性がすべてのデータ点で同じであると仮定すれば，S の代わりに $S' = \sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - y_i)^2$ を最小化する問題になります．以下ではこの形で考えましょう．最小２乗法を適用して関数形を決めることを，最小２乗フィッティングといいます．

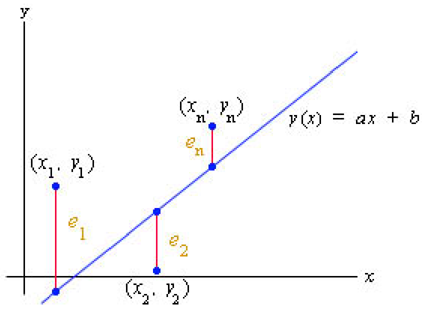

図 5: 最小２乗法の概念図．データの組を $y = ax + b$ の形の直線として表現することを考える．各 x_i でのデータ y_i と関数 $y(x_i)$ の差を e_i としたとき，その２乗和 $S = \sum_{i=1}^{n} e_n^2$ を最小にするように (a, b) を決定する．

4.4.1 gnuplot の最小２乗フィッティング機能

ある数値データファイルがあって，これを最小２乗フィッティングすることを考えます．

例として，データファイル”ex.dat”に，第一カラム x, 第二カラム y のデータが書かれているとします．このデータをある曲線でフィットするには，まずその曲線の形を指定します．例えば，二次関数でフィットしたい場合，$f(x) = ax^2 + bx + c$ の形の関数を決定するので，３つの未知定数 a, b, c を決める問題になります．

```
gnuplot> f(x)=a*x**2 + b*x + c
gnuplot> fit f(x) ’ex.dat’ via a,b,c
```

これを実行すると，計算機がフィッティングを実行して，最後に

```
Final set of parameters            Asymptotic Standard Error
=======================            ==========================

a               = 5.76731          +/- 0.176        (3.051\%)
b               = 1.89369          +/- 0.2127       (11.23\%)
c               = 25.7956          +/- 9.807        (38.02\%)


correlation matrix of the fit parameters:

               a      b      c
a              1.000
b             -0.944  1.000
c              0.975 -0.975  1.000
```

のような結果を返します．ここで，"Final set of parameters"の下にある a,b,c の値が，フィッティングの結果に決定された係数 a,b,c の値になっています．フィッティング曲線と，元のデータ点を同時にプロットして比較してみるには

```
gnuplot> plot f(x), 'ex.dat' using 1:2
```

などとします．

問

1. GW150914 のチャープ質量 $\mathcal{M}_{ch}$ はいくらですか．

2. 連星の質量を $m_1 \geq m_2$ とします．質量比 $q = m_1/m_2$ のとき，m_2 をチャープ質量と q で表しなさい．GW150914 イベントで連星系の小さい方の質量は，最大では太陽質量の何倍となりますか．

3. いま，$q = 1$(質量比が 1) の簡単化した場合を考えます．連星合体直前の重力波の振動数は $f_{GW} \sim$ 150Hz 程度ですが，そのときの連星間距離 R と，連星の Schwarzschild 半径（重力半径の 2 倍）の総和との比はいくらですか．
（ヒント）連星間距離は式 (1) を用いて考えなさい．

4. 距離 D にある連星からの重力波の振幅は
$$h = \frac{2}{DR}\left(\frac{Gm_1}{c^2}\right)\left(\frac{Gm_2}{c^2}\right) \tag{9}$$
と見積もれます [4]．連星の質量比 $q = 1$，LIGO で観測された最大振幅を h として，GW150914 を起こした連星系までの距離を求めなさい（単位 Mpc）．

参考文献

[1] Abbott, B.P. 他, *Physical Review Letters*, **116**, 061102 (2016)

[2] 「重力波とはなにか」安東正樹　（講談社ブルーバックス）

[3] 東京大学宇宙線研究所：KAGRA ウェブページ `http://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/`

[4] 「重力波をとらえる – 存在の証明から検出へ」（第 3 章）　中村卓史，三尾典克，大橋正健　編著，京都大学学術出版会

[5] データ源：`https://losc.ligo.org/events/GW150914/`

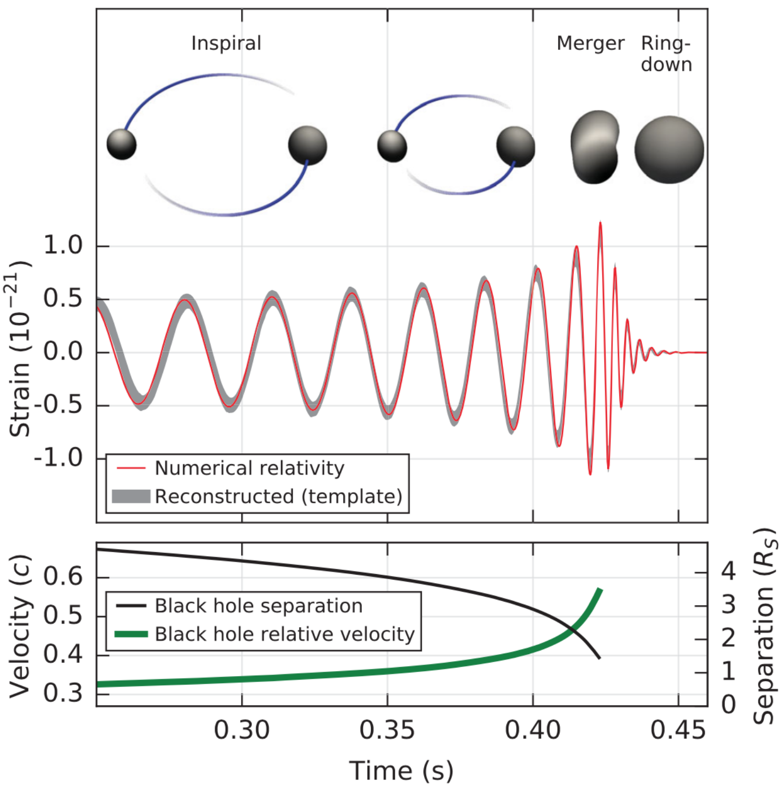

図 6: 連星合体からの重力波 GW150914．中央図の縦軸は相対的な距離の変動 h で，横軸は経過時間．下図の縦軸は連星の相対的な速さ（緑色太線），と連星間距離（全質量から計算した Schwarzschild 半径を単位とする）．Abbott et al. (2016) より．