Grad-Shafranov 方程式を用いた磁場星の計算

藤澤幸太郎

東京大学総合文化研究科

大谷潤　吉田慎一郎　江里口良治 (東大総合文化)
高橋労太 (理研)

平成 22 年 5 月 24 日 (月) @ 駒場コロキウム

目次

1. Self-Consistent な定常状態
2. GS 方程式の導出
3. 運動方程式の積分可能条件と電流密度の形
4. GS 方程式の解法
5. 具体的な計算結果
6. 今後への展望

表記

- (r, θ, φ) は極座標，(R, Z, φ) は円筒座標．$(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_\varphi)$ などは単位ベクトル．
- ϕ_g：重力ポテンシャル，p：圧力，ρ：密度，$\boldsymbol{v}$：流体の速度，Ω：角速度，$\boldsymbol{H}$：磁場，$\boldsymbol{E}$：電場，$\boldsymbol{j}$：電流密度，

などを用います．

1.Self-Consistentな定常状態

基礎方程式と背景

- 自己重力と圧力，回転で釣り合っている，回転している星の Self-Consistent な定常状態が知りたい.

基礎方程式

- 運動方程式

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\phi_g + R\Omega^2 \boldsymbol{e}_R$$

- Poisson 方程式

$$\Delta\phi_g = 4\pi G\rho$$

定常状態

- 物質や流れ，構造などが時間で変化しないこと ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).
  - 力が釣り合って動かないボール
  - 常に同じ速度，流量で流れる川
  - 回転と自己重力，圧力でつりあっている回転星

$$\Downarrow$$

定常化された運動方程式の第一積分を見つけて，運動方程式を積分する.

運動方程式の第一積分

- 定常化された渦なし回転星の運動方程式

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\phi_g + R\Omega^2 \boldsymbol{e}_R,$$

$\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ なら $\boldsymbol{A} = -\nabla f$ となり積分が可能に.

- バロトロープ $p = p(\rho)$ を仮定すると
  $\nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = 0$ に,
- $\Omega = \Omega(R)$ とすると $\nabla \times (R\Omega^2 \boldsymbol{e}_R) = 0$ になり,
  $\nabla H = \nabla(-\phi_g + \phi_{rot}) \Rightarrow H = -\phi_g + \phi_{rot} + C,$

運動方程式の第一積分を得る. $(H = \int \frac{dp}{\rho})$

> 全てのポテンシャルが決まれば密度分布が分かる.

Self-Consistent とは

1. 自己満足な
   -
2. 自意識過剰な
   -
3. 自己矛盾のない
   -
4. 自信のある
   -

Self-Consistent とは

1. 自己満足な
    - Self-Complacent
2. 自意識過剰な
    - Self-Conscious
3. 自己矛盾のない
    - Self-Consistent
4. 自信のある
    - Self-Confident

全ての基礎方程式が，自己矛盾の無いような状態を計算する．

自己重力物質

- 密度分布はポテンシャルを決めれば拡張されたベルヌーイの式から求まる．
- しかし，密度分布が変われば，Poisson 方程式 $\Delta\phi_g = 4\pi G\rho$ より重力ポテンシャルも変わる．
- 重力ポテンシャルが変わると密度分布も変わる$\cdots$

$$\Delta\phi_g = 4\pi G\rho \qquad \int \frac{dp}{\rho} = -\phi_g + \phi_{rot} + C,$$

どちらの式も満たすように，両方の式を交互に解いて収束させる．

回転している星の場合

- 運動方程式と Poisson 方程式と状態方程式方程式 (バロトロープ)

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\phi_g + R\Omega^2 \boldsymbol{e}_R$$

$$\Delta\phi_g = 4\pi G\rho, \quad p = p(\rho)$$

運動方程式を積分して，拡張されたベルヌーイの式を得る.

$$\int \frac{dp}{\rho} = -\phi_g + \phi_{rot} + C,$$

拡張されたベルヌーイの式と Poisson 方程式が Self-Consistent になるように計算する[1].

[1] Hachisu, I. ,1986, ApJS, 119, 497

磁場が入った星の場合

- 運動方程式と Poisson 方程式，バロトロープ．

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\phi_g + R\Omega^2\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H},$$

$$\Delta\phi_g = 4\pi G\rho, \quad p = p(\rho).$$

- 定常化された Maxwell 方程式．

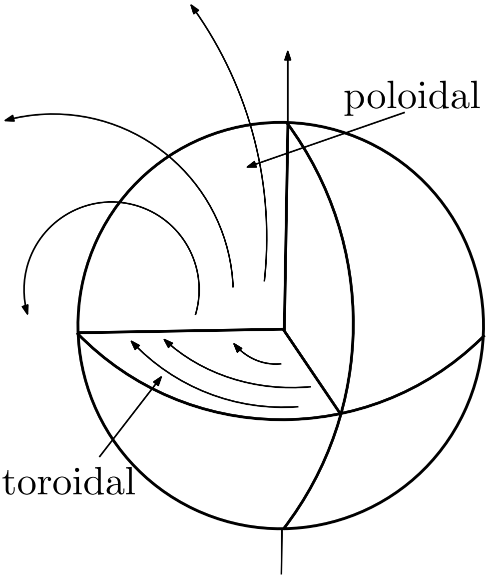
$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e,\ \ \nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0,\ \ \nabla\times\boldsymbol{E} = 0,\ \ \nabla\times\boldsymbol{H} = 4\pi\frac{\boldsymbol{j}}{c}.$$

- 運動方程式の第一積分はそれほど自明ではない．
- これらの式全てを self-consistent に解くのは非常に難しい．

何らかの仮定を課して Maxwell 方程式を簡略化し，また第一積分を見つけたい．

2.GS方程式の導出

ポロイダル磁場とトロイダル磁場



磁場星の磁力線の構造

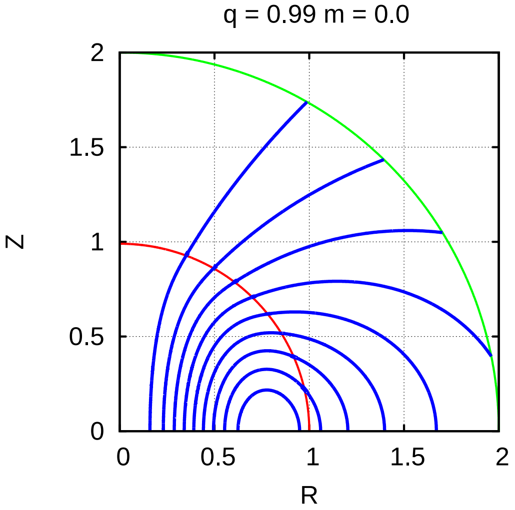


Figure: 磁力線．Poloidal 磁場を表す．この磁力線に沿って値が等しいスカラー関数が flux function Ψ である．

Grad-Shafranov 方程式

- H.Grad & H.Rubin(1958)[2]，Shafranov(1966)[3] によって導かれた方程式．空間に対称性を課し3次元を2次元にして，flux function Ψ を用いて書ける楕円型方程式．

$$\Delta^* \Psi = -4\pi R \frac{j_\varphi}{c},$$

$$\Delta^* \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R} = R\frac{\partial \Psi}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2},$$

- 右辺の電流密度の形を与えることで，定常状態の磁場構造が得られる．

---

[2]Grad, H.,& Rubin, H. 1958, Proceedings of the 2nd UN Conf. 31,190

[3]Shafranov, V.D. 1966, Reviews of Plasma Physics, 2,103

基礎方程式と仮定

- 定常 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) で軸対称 ($\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$) を仮定.
  - Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e, \ \ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \ \ \nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \ \ \nabla \times \boldsymbol{H} = 4\pi\frac{\boldsymbol{j}}{c}.$$

- ideal MHD を仮定
  - 一般化された Ohm の法則

$$\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} = 0.$$

- ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

flux function Ψ

- $\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$ から導かれる．等高線が磁力線を表す.

$$H_z \equiv \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi(R,z)}{\partial R}, \quad H_R \equiv -\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi(R,z)}{\partial z}.$$

- ベクトルポテンシャルとの関係.

$$\Psi(R,z) = R A_\varphi(R,z).$$

- 磁場構造を決定する関数.

GS 方程式

- Ψ を使って磁場を書き直す.

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \left(-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\varphi), \frac{\partial H_R}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial R} \right).$$

$$\{\nabla \times \boldsymbol{H}\}_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}.$$

- $-R$ をかけて．Maxwell-Ampere 方程式に代入し，電流と関係付ける.

$$\Delta^* \Psi = -4\pi R \frac{j_\varphi}{c}.$$

3. 運動方程式の積分可能条件と電流密度の形

自己重力電磁流体

- 自己重力がある流体の GS 方程式を考える.
  - 基礎方程式

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \quad \frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla \phi_g + \Omega^2 R\, \boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c} \times \boldsymbol{H}\right),$$

$$\Delta \phi_g = 4\pi G \rho,$$

- Maxwell 方程式，ideal MHD の式，自己重力流体の式，適切な境界条件の全てを満たした釣り合い状態を求める.
- 以下，Tomimura & Eriguchi (2005)[4] らの定式化に基づく (参考文献参照).

---

[4]Tomimura, Y. & Eriguchi, Y., 2005, MNRAS, 259, 1117

積分可能条件と電流密度の形

運動方方程式が

$$\int \frac{dp}{\rho} = -\phi_g + \frac{1}{2}R^2\Omega^2(\Psi) + \int \mu(\Psi)\, d\Psi + C,$$

という形に積分が可能な時，電流密度は

$$\frac{\boldsymbol{j}}{c} = \frac{\kappa'(\Psi)}{4\pi}\boldsymbol{H} + \rho R\left(\mu(\Psi) + R^2\Omega(\Psi)\Omega'(\Psi)\right)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

$\kappa(\Psi)$，$\mu(\Psi)$，$\Omega(\Psi)$ は Ψ の任意関数.
それぞれの任意関数に具体的な関数形を与えることで，様々な磁場構造が得られる.

Ψの任意関数Ω

$v_\varphi = R\Omega$を用いてφ成分を考えると,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Omega}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

となるので,

$$\Omega \equiv \Omega(\Psi).$$

$\boxed{\text{回転は}\Psi\text{によって決まる.}}$

Ψの任意関数κ

Lorentz力$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{j}/c \times \boldsymbol{H}$の$\varphi$成分を考える.

$$F_\varphi = \frac{j_z}{c} H_R - \frac{j_R}{c} H_z = 0,$$

となる．電流密度をΨで書き直す.

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial R}(RH_\varphi)\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(RH_\varphi)\frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0.$$

よって，Ψの任意関数κを用いて

$$RH_\varphi \equiv \kappa(\Psi).$$

トロイダル磁場は$\kappa(\Psi)$によって決まる.

Ψの任意関数μ その1

運動方程式の遠心力とLorentz 力の項が,

$$\Omega^2 R\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) = \nabla\left(\frac{1}{2}\Omega^2(\Psi)R^2\right) + \nabla(\nu(\Psi)),$$

と書くことができると，運動方程式が積分できる．今までの任意関数を用いて計算してみると,

$$\begin{aligned}
&\Omega^2 R\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) \\
= \ & \left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{2}\Omega^2 R^2\right) + \frac{\partial\Psi}{\partial R}\left(-R^2\Omega\Omega' + \frac{1}{\rho R}\frac{j_\varphi}{c} - \frac{1}{4\pi\rho R}\kappa'(\Psi)H_\varphi\right)\right\}\boldsymbol{e}_R \\
+ \ & \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\Omega^2 R^2\right) + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\left(-R^2\Omega\Omega' + \frac{1}{\rho R}\frac{j_\varphi}{c} - \frac{1}{4\pi\rho R}\kappa'(\Psi)H_\varphi\right)\right\}\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

Ψの任意関数μ その2

$$\mu(\Psi) \equiv \frac{1}{\rho R}\left(\frac{j_\varphi}{c} - \frac{1}{4\pi}\kappa' H_\varphi\right) - R^2\Omega\Omega'$$

と定義すると,

$$\Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) = \nabla\left(\frac{1}{2}\Omega^2(\Psi)R^2\right) + \nabla\left(\int\mu(\Psi)\,d\Psi\right).$$

$$\frac{\boldsymbol{j}}{c} = \frac{\kappa'(\Psi)}{4\pi}\boldsymbol{H} + \rho R\left(\mu(\Psi) + R^2\Omega(\Psi)\Omega'(\Psi)\right)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

$\boxed{\mu(\Psi)\text{ は poloidal 磁場の偏り具合を表す.}}$

運動方程式の積分

以上のような任意関数を用いて.

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\phi_g + \Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right),$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{dp}{\rho} = K(N+1)\rho^{1/N} = -\phi_g + \frac{1}{2}R^2\Omega^2(\Psi) + \int\mu(\Psi)\,d\Psi + C.$$

拡張されたベルヌーイの式が得られた. 釣り合い状態の磁場からの影響を組み込んで物質 (ρ) を決定できる.

4.GS方程式の解法

GS 方程式の左辺

- ここまでで，GS 方程式の右辺 (電流密度) は決まった．

$$\Delta^*\Psi = -4\pi R\frac{j_\varphi}{c},$$

$$\Delta^*\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} = R\frac{\partial\Psi}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2},$$

- 左辺の Ψ を $A_\varphi (= \Psi/R)$ に，微分演算子をラプラシアンに書き換える．

$$\Delta(A_\varphi \sin\varphi) = \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial R} - \frac{A_\varphi}{R^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2}\right)\sin\varphi.$$

一般化されたGS方程式

以上から，次のようなPoisson型方程式が得られる.

$$\Delta(A_\varphi \sin\varphi) = S \sin\varphi,$$

$$S = -\left(\kappa' H_\varphi + 4\pi\rho R\mu + 4\pi\rho R^3 \Omega\Omega'\right).$$

この方程式を一般化されたGS方程式として，A_φ に関して解き，そこからΨを求める.

無限遠での境界条件の取り込み

- 2つの Poisson 方程式

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad \Delta(A_\varphi \sin\varphi) = S \sin\varphi,$$

- 磁場：$A_\varphi \Rightarrow \frac{1}{r}(O)$ $(H_p \Rightarrow \frac{1}{r^2}(O))$,
- 重力ポテンシャル：$\phi_g \Rightarrow \frac{1}{r}(O)$

$$\Downarrow$$

$$A_\varphi(\boldsymbol{r}) \sin\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{S(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \sin\varphi' d^3\boldsymbol{r}'.$$

$$\phi_g(\boldsymbol{r}) = -G\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d^3\boldsymbol{r}'.$$

まとめ

- 解くべき微分方程式

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\phi_g + \Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right).$$

$$\Delta\phi_g = 4\pi G\rho, \quad \Delta(A_\varphi \sin\varphi) = S\,\sin\varphi.$$

- 積分形

$$\int\frac{dp}{\rho} = -\phi_g + \frac{1}{2}R^2\Omega^2(\Psi) + \int\mu(\Psi)\,d\Psi + C.$$

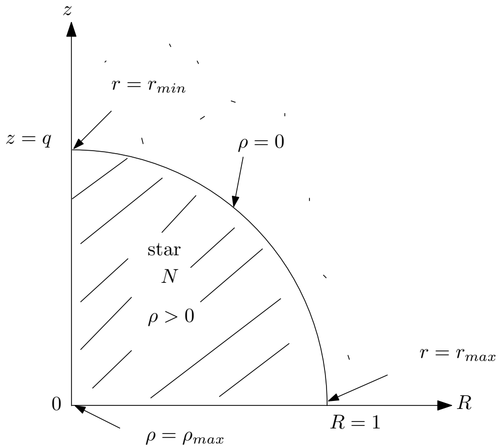
$$\phi_g(\boldsymbol{r}) = -G\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'.$$

$$A_\varphi(\boldsymbol{r})\sin\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{S(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\sin\varphi' d^3\boldsymbol{r}'.$$

5. 具体的な計算結果

数値計算スキーム

- HSCF Scheme (Hachisu 1986(a))[5]を使用.



- 軸比 q を固定することで，その軸比に相当する回転，磁場を伴った星を求める.

[5]Hachisu, I. ,1986, ApJS, 119, 497

具体的な任意関数の形

電流密度

$$\frac{\boldsymbol{j}}{c} = \{\kappa'(\Psi)\}\boldsymbol{H} + \rho R\left(\mu(\Psi) + \Omega'(\Psi)\Omega(\Psi)\right)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

に対して，

$$\begin{aligned}
\kappa(\Psi) &= \frac{1}{4\pi}\frac{a}{k+1}(\Psi - \Psi_{\max})^{k+1}Y(\Psi - \Psi_{\max}), \\
\Omega(\Psi) &= \Omega_0(\Psi^2 + d^2)^\alpha, \\
\mu(\Psi) &= \mu_0(\Psi + \epsilon_\mu)^m.
\end{aligned}$$

ただし，$\Psi_{\max}$ は真空 (密度 0) で最も大きい Ψ

$$Y(x) = \begin{cases} 0, & (x \le 0) \\ 1, & (x > 0) \end{cases}$$

磁場構造

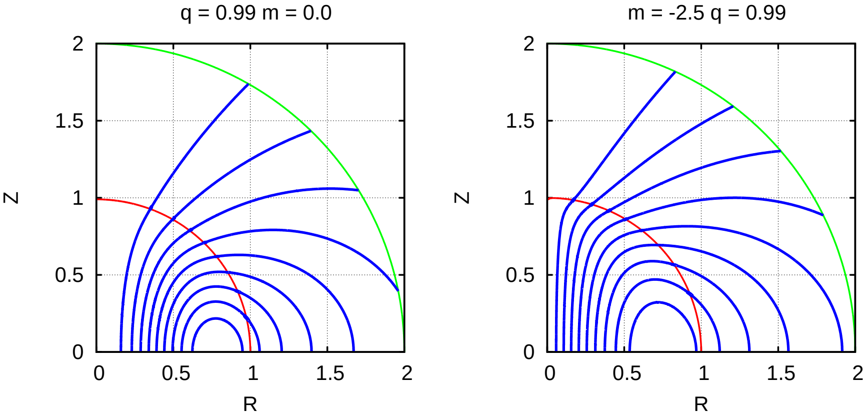
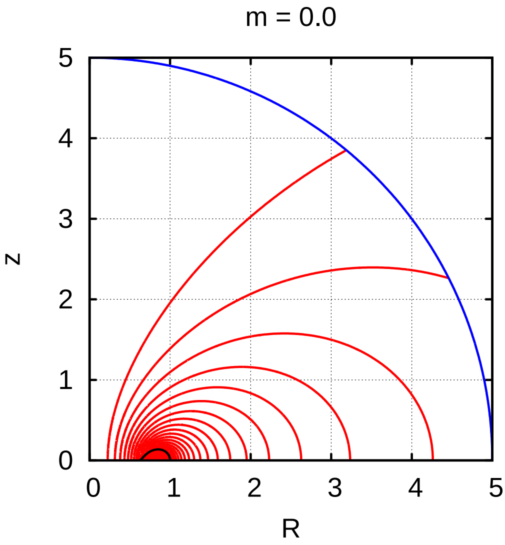


Figure:

円場とディスクの系



6. 今後への展望

今後への展望

まずは Newton 重力で

- 星とウインドの系の計算.
  (修論の中間発表で)
- BH(質点) とトーラスとウインドの系の計算.

次に一般相対論に拡張して,

- Poloidal，Toroidal 両方の磁場が入った星の磁場構造の計算.
- BH と Poloidal 磁場のみのトーラスの計算
  (藤井君の修論．来週の話?).
- 星とウインドの計算 (パルサー風).
- BH も含めた磁気圏の GS 方程式の計算.